Об определении оптимальных курсов валюты в обменных пунктах банка

© *1997, М.В. Захаров,*
Старший специалист сектора автоматизации
филиала Мосбизнесбанка - Отделение в городе Сочи

9 августа 1997 г.

Россия, 354057, г. Сочи, 57-е отд. связи, а/я 490.

В статье [1] предложена модель работы обменного пункта и на ее основе метод определения оптимальных курсов покупки/продажи иностранной валюты. Однако курсы валют, определяемые с помощью этого метода, несколько отличались от курсов, выставляемых экспертами, отвечающими за курсы валют на обменных пунктах банка. Поэтому этот метод был пересмотрен с целью приблизить получамые оценки курсов к оценкам экспертов.

1 Введение

Прежде всего отметим, что оптимальность курсов обмена и выдаваемых авансов рассматривается с точки зрения прибыли, получаемой от совершаемых операций на обменном пункте банка.

В работе [1] делается замечание о зависимости оптимальных курсов валют многих факторов, таких как: местоположение обменного пункта, состава клиентов, курсов ММВБ[1] и ЦБ, сезонных факторов и т.п., но при построении методики расчета оптимальных курсов обмена валют рассматривается только зависимость объема продажи/покупки от сответствующего курса обмена.

Хотя на обменном пункте могут совершаться операции с различными валютами, все дальнейшие рассуждения приводятся только для одной валюты.

Обозначим $K_{\text{Б}}$ – курс ЦБ. И пусть :
$k_{\text{пок}}$ – курс покупки валюты;
$V_{\text{пок}}$ – количество купленной валюты;
$r_{\text{пок}}$ – накладные расходы на каждую купленную единицу валюты;

[1] *Небольшое замечание:* В работе [1] *" базисным"* курсом выбран курс ММВБ, однако с момента выхода этой статьи несколько изменились правила официальной котировки иностранных валют, и в большинстве случаев в настоящее время в качестве *"базисного"* используется официальный курс ЦБ РФ. Однако это никак не влияет на методику расчета оптимальных курсов из этой статьи, за исключением *"периименования"* одной переменной.

$k_{\text{пр}}$ – курс продажи валюты;
$V_{\text{пр}}$ – количество проданной валюты;
$r_{\text{пр}}$ – накладные расходы на каждую проданную единицу валюты;
D – однодневный доход в рублях, определяемый по формуле

$$D = (k_{\text{пр}} - r_{\text{пр}} - \text{К}_{\text{Б}})V_{\text{пр}} + (\text{К}_{\text{Б}} - 0.995 \cdot k_{\text{пок}} - r_{\text{пок}})V_{\text{пок}}$$

Коэффициент 0.995 означает, что по действующему на данный момент законодательству РФ с объема купленной иностранной валюты взимается налог в размере 0.5%.

Далее как и в [1] предположим, что существует линейная зависимость среднедневного объема покупки и среднедневного объема продажи от разницы соответствующего курса и курса ЦБ:

$$V_{\text{пок}} = max(0, a_{\text{пок}} + b_{\text{пок}}(k_{\text{Б}} - 0.995 \cdot k_{\text{пок}})), \quad V_{\text{пр}} = max(0, a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}(k_{\text{пр}} - K_{\text{Б}})). \qquad (1)$$

Сделаем замену переменных: $x = k_{\text{пр}} - \text{К}_{\text{Б}}$, $y = \text{К}_{\text{Б}} - 0.995 \cdot k_{\text{пок}}$. Тогда для выражений (1) получим:

$$V_{\text{пр}} = a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x \text{ и } V_{\text{пок}} = a_{\text{пок}} + b_{\text{пок}}y$$

Тогда однодневный доход записывается в виде: $D = (x - r_{\text{пр}})(a_{\text{пр}} - b_{\text{пр}}x) + (y - r_{\text{пок}})(a_{\text{пок}} + b_{\text{пок}}y)$ или

$$D = b_{\text{пр}}x^2 + (a_{\text{пр}} - b_{\text{пр}}r_{\text{пр}})x - a_{\text{пр}}r_{\text{пр}} + b_{\text{пок}}y^2 + (a_{\text{пок}} - b_{\text{пок}}r_{\text{пок}})y - a_{\text{пок}}r_{\text{пок}} \qquad (2)$$

Значения коэффициентов $a_{\text{пок}}$, $a_{\text{пр}}$, $b_{\text{пок}}$, $b_{\text{пр}}$ находятся на основании реальных данных работы обменного пункта как коээффициенты линейной регрессии.

$$a_{\text{пр}} = \frac{\overline{x^2}\,\overline{V_{\text{пр}}} - \overline{x}\,\overline{xV_{\text{пр}}}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad a_{\text{пок}} = \frac{\overline{x^2}\,\overline{V_{\text{пок}}} - \overline{x}\,\overline{xV_{\text{пок}}}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

$$b_{\text{пр}} = \frac{\overline{xV_{\text{пр}}} - \overline{x}\,\overline{V_{\text{пр}}}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad b_{\text{пок}} = \frac{\overline{xV_{\text{пок}}} - \overline{x}\,\overline{V_{\text{пок}}}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

где $\overline{\alpha}$ обозначает среднее значение.

2 Нахождение оптимальных курсов при заданном балансе купленной и проданной валюты

Часто необходимо через обменный пункт либо продать излишек валюты в размере A единиц, тогда

$$V_{\text{пр}} = V_{\text{пок}} + A, \qquad (3)$$

либо купить некоторый объем валюты в B единиц, тогда

$$V_{\text{пр}} + B = V_{\text{пок}}. \qquad (4)$$

Уравнения (3) и (4) можно записать в виде общем виде:

$$V_{\text{пр}} - V_{\text{пок}} = C \tag{5}$$

или $a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x - a_{\text{пок}} - b_{\text{пок}}y = C$. Из выражений (1) ввиду неотрицательности объемов купленной и проданной валюты получаем граничные условия: $a_{\text{пок}} + b_{\text{пок}}y \geq 0$ и $a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x \geq 0$. Обычно банки продают валюту дороже курса ЦБ, а покупают - ниже, поэтому получаем следующие ограничения: $x \geq 0$ и $y \geq 0$. И задача нахождения максимального однодневного дохода записывается в виде:

$$\begin{cases} D = b_{\text{пр}}x^2 + (a_{\text{пр}} - b_{\text{пр}}r_{\text{пр}})x - a_{\text{пр}}r_{\text{пр}} + b_{\text{пок}}y^2 + (a_{\text{пок}} - b_{\text{пок}}r_{\text{пок}})y - a_{\text{пок}}r_{\text{пок}} \to max \\ a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x - a_{\text{пок}} - b_{\text{пок}}y = C \\ a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x \geq 0 \\ a_{\text{пок}} + b_{\text{пок}}y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Из ограничения на баланс объемов купленной и проданной валюты выразим y через x:

$$y = \frac{a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x - a_{\text{пок}} - C}{b_{\text{пок}}}$$

и подставим это выражение для y в целевую функцию:

$$\begin{aligned} D &= b_{\text{пр}}x^2 + (a_{\text{пр}} - b_{\text{пр}}r_{\text{пр}})x - a_{\text{пр}}r_{\text{пр}} + \frac{(a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x - a_{\text{пок}} - C)^2}{b_{\text{пок}}} + \\ & (a_{\text{пок}} - b_{\text{пок}}r_{\text{пок}})\frac{(a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x - a_{\text{пок}} - C)}{b_{\text{пок}}} - a_{\text{пок}}r_{\text{пок}} \end{aligned} \tag{6}$$

Решение задачи может находится либо внутри области допустимых значений, либо на границе этой области. Стационарная точка

$$X_0 = \frac{b_{\text{пр}}r_{\text{пр}} - a_{\text{пр}} + \frac{b_{\text{пр}}}{b_{\text{пок}}}(2C + a_{\text{пок}} - 2a_{\text{пр}} + b_{\text{пок}}r_{\text{пок}})}{2\frac{b_{\text{пр}}}{b_{\text{пок}}}(1 + b_{\text{пр}})}$$

является точкой локального максимума при условии $b_{\text{пр}}(1 + b_{\text{пр}}) < 0$ и при условии нахождения внутри области допустимых значений.

Для нахождения максимума этой функции на границе области допустимых значений воспользуемся методом штрафных функций. Для заданных ограничений штрафная функция принимает вид:

$$\begin{aligned} Ш(x) &= (\min(a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x, 0))^2 + (\min(a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x - C, 0))^2 + \\ & (\min(x, 0))^2 + \left(\min(\frac{a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x - a_{\text{пок}} - C}{b_{\text{пок}}}, 0)\right)^2 \end{aligned}$$

и необходимо найти максимум функции $D(x) - r\text{Ш}(x)$. При $r \to \infty$ последовательность максимумов штрафных функций будет сходиться к максимуму функции (6) при заданных ограничениях.

Точка максимума функции (6) находится среди точек

$$X_{\mathbf{b}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} [\mathbf{b}]_i \, \mathcal{N}_i}{\sum_{i=1}^{4} [\mathbf{b}]_i \, \mathcal{D}_i}, \quad \mathbf{b} = 1..15 \tag{7}$$

где $[\mathbf{b}]_i$ – i-я цифра в двоичной записи числа $\mathbf{b}$ и

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{N}_1 = -b_{\text{пр}} a_{\text{пр}} & \mathcal{D}_1 = b^2_{\text{пр}} \\
\mathcal{N}_2 = b_{\text{пр}}(C - a_{\text{пр}}) & \mathcal{D}_2 = b^2_{\text{пр}} \\
\mathcal{N}_3 = 0 & \mathcal{D}_3 = 1 \\
\mathcal{N}_4 = \frac{b_{\text{пр}}}{b_{\text{пок}}}(C + a_{\text{пок}} - a_{\text{пр}}) & \mathcal{D}_4 = \frac{b^2_{\text{пр}}}{b^2_{\text{пок}}}
\end{array}$$

Среди точек (7) решение содержится только среди тех точек для которых истинно высказывание:

$$U_{\mathbf{b}} = \bigwedge_{i=1\ldots4,\ [\mathbf{b}]_i=1} \mathcal{U}_i \tag{8}$$

где конъюнкция берется только по тем подформулам, для которых в соответсвующем разряде двоичного представления числа $\mathbf{b}$ стоит 1 и

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{U}_1 : & a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}} x < 0 \\
\mathcal{U}_2 : & a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}} x - C < 0 \\
\mathcal{U}_3 : & x < 0 \\
\mathcal{U}_4 : & \dfrac{a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}} x - a_{\text{пок}} - C}{b_{\text{пок}}} < 0
\end{array}$$

Среди точек (7), удовлетворяющих заданным условиям (8), и, следовательно, являющихся точками локального максимума при заданных ограничениях, и стационарной точки X_0, если она является точкой локального максимума и находится внутри области допустимых значений, выбирается та, в которой функция ежедневного дохода достигает большего значения.

3 Нахождение оптимальных курсов без задания определенного баланса купленной и проданной валюты

Для режима работы обменного пункта, не требующего определенного баланса купленной и проданной валюты в конце операционного дня, задача, из-за отсутствия ограничения типа равенства, не может быть сведена к задаче нахождения максимума функции одного переменного. В этом случае постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} D = b_{\text{пр}}x^2 + (a_{\text{пр}} - b_{\text{пр}}r_{\text{пр}})x - a_{\text{пр}}r_{\text{пр}} + b_{\text{пок}}y^2 + (a_{\text{пок}} - b_{\text{пок}}r_{\text{пок}})y - a_{\text{пок}}r_{\text{пок}} \to max \\ a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x \geq 0 \\ a_{\text{пок}} + b_{\text{пок}}y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

А соответсвующая штрафная функция равна

$$\begin{aligned} Ш(x) \quad &= \quad (\min(a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x, 0))^2 + (\min(x, 0))^2 + \\ & \quad\quad (\min(a_{\text{пок}} + b_{\text{пок}}y, 0))^2 + (\min(y, 0))^2 \end{aligned}$$

Аналогично случаю с заданным балансом купленной и проданной валюты, максимум функции однодневного дохода может находится либо внутри, либо на границе области допустимых знаний. Стационарная точка (X_0, Y_0):

$$X_0 \quad = \quad \frac{b_{\text{пр}}r_{\text{пр}} - a_{\text{пр}}}{2b_{\text{пр}}}, \qquad Y_0 \quad = \quad \frac{b_{\text{пок}}r_{\text{пок}} - a_{\text{пок}}}{2b_{\text{пок}}}$$

является точкой локального максимума при условии $b_{\text{пр}}b_{\text{пок}} > 0$ и $b_{\text{пр}} < 0$, а также при условии нахождения внутри области допустимых значений.

Максимальное значение на границе области допустимых значений при заданных ограничениях находится среди точек $(X_{\mathbf{b}}, Y_{\mathbf{b}})$:

$$X_{\mathbf{b}} \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{2}[\mathbf{b}]_i \mathcal{N}_x^i}{\sum_{i=1}^{2}[\mathbf{b}]_i \mathcal{D}_x^i}, \qquad Y_{\mathbf{b}} \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{2}[\mathbf{b}]_i \mathcal{N}_y^i}{\sum_{i=1}^{2}[\mathbf{b}]_i \mathcal{D}_y^i}, \qquad \mathbf{b} \quad = \quad 1 \ldots 3 \tag{9}$$

где $[\mathbf{b}]_i$ – i-я цифра в двоичной записи числа $\mathbf{b}$ и

$$\begin{array}{ll} \mathcal{N}_x^1 = -b_{\text{пр}}a_{\text{пр}} & \mathcal{D}_x^1 = b_{\text{пр}}^2 \\ \mathcal{N}_x^2 = 0 & \mathcal{D}_x^2 = 1 \\ & \\ \mathcal{N}_y^1 = -b_{\text{пок}}a_{\text{пок}} & \mathcal{D}_y^1 = b_{\text{пок}} \\ \mathcal{N}_y^2 = 0 & \mathcal{D}_y^2 = 1 \end{array}$$

Среди точек (9) решение содержится только среди тех точек для которых истинно высказывание:

$$U_{\mathbf{b}} \quad = \quad \bigwedge_{i=1\ldots2,\ [\mathbf{b}]_i=1} \left(\mathcal{U}_x^i \bigwedge \mathcal{U}_y^i\right) \tag{10}$$

где конъюнкция берется только по тем подформулам, для которых в соответсвующем разряде двоичного представления числа $\mathbf{b}$ стоит 1 и

$$\begin{array}{ll} \mathcal{U}_x^1 : & a_{\text{пр}} + b_{\text{пр}}x < 0 \\ \mathcal{U}_x^2 : & x < 0 \\ \mathcal{U}_y^1 : & a_{\text{пок}} + b_{\text{пок}}x < 0 \\ \mathcal{U}_y^2 : & y < 0 \end{array}$$

Среди точек (9), удовлетворяющих заданным условиям (10), и, следовательно, являющихся точками локального максимума при заданных ограничениях, и стационарной точки (X_0, Y_0), если она является точкой локального максимума и принадлежит области допустимых значений, выбирается та, в которой функция ежедневного дохода достигает большего значения.

4 Заключение

Описанная выше модель работы обменного пункта в большей степени предназначена для помощи эксперту банка в определении обменных курсов валют при заданных авансах, а также для преодоления эффекта "круглых" курсов обмена, когда долгое время из-за установки курса обмена кратным 1000, 100, и в меньшей степени 10, рублям (что весьма удобно в расчетных и учетных операциях), банк может недополучать доход от совершаемых на обменных пуктах операций.

Хотя в работе [1] отмечается, что метод строится на полных данных о работе рассматриваемого обменного пункта за некоторый прошедший период времени, однако, при использовании специальных методов (см., например, [2]), возможно нахождение решения и при неполных данных. Поэтому условие наличия полных данных в этой задаче не является необходимым для нахождения приемлемого решения (т.е. близкого к решению эксперта).

Заданный баланс купленной и проданной валюты на всех обменных пунктах банка. Нередко банкам для урегулирования валютной позиции, задаваемой Центральным Банком РФ, необходимо в течение дня продать или купить определенный объем иностранной валюты. В этом случае необходимо величину требуемого баланса разделить между всеми обменными пунктами банка пропорционально их среднедневному объему операций. После определения заданных квот балансов, для каждого обменного пункта необходимо решить соответсвующую задачу из раздела 2.

О кусочно-линейной аппроксимации Дальнейшее улучшение модели работы обменного пункта может быть произведено за счет использования кусочно-линейной регрессии объемов операций от соответующей разницы курсов покупки/продажи. В этом случае необходимо решать несколько задач, аналогичных описанным в разделах 2 и 3.

Литература

[1] **Аркадий Екушов.** Определение оптимальных курсов покупки/продажи валюты в обменном пункте. *"RS-Club", 1996, Нулевой номер, стр. 17-19.*

[2] **Р.Дж.А. Литтл, Д.Б. Рубин.** Статистический анализ данных с пропусками. *Москва, "Финансы и статистика", 1991.*