Высшая математика. Кратко.

Дама червей напекла кренделей
В летний погожий денёк.
Валет червей был всех умней
И семь кренделей уволок.

Содержание

1 Линейная алгебра.

Линейная алгебра – раздел математики, занимающийся операциями над матрицами, определителями, решением систем линейных алгебраических уравнений.

1.1 Матрицы: основные обозначения и определения.

Определение. Прямоугольная таблица $m \cdot n$ чисел

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \widehat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей (прямоугольной)* размера $m \times n$. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*, а число m, равное n, - ее *порядком.* Множество всех матриц размера $m \times n$ обозначается символом $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Определение. Две матрицы одинакового размера называются равными если элементы этих матриц, расположенные в одинаковых позициях, равны

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}, \text{ если } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ и } a_{ij} = b_{ij} \quad i = \overline{1,m}\ j = \overline{1,n}$$

Определение. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором.*

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \vec{c} \in \mathbb{R}^{m\times 1};\ (c_1\, c_2\, \cdots\, c_m) = \vec{c}^{\,T} \in \mathbb{R}^{1\times m}$$

Определение. *Нулевой матрицей* называется матрица, у которой все элементы равны нулю. Обозн: $\mathbf{O}$.

Определение. *Единичной матрицей* называется матрица $\mathbf{A}$, у которой элементы $a_{ii} = 1$, а остальные элементы равны нулю. Обозн: $\mathbf{E}$, $\mathbf{I}$.

1.2 Действия над матрицами.

Определение. Пусть даны две матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Суммой* этих матриц называется матрица $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{B}^{m\times n}$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Обозн: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

Пример. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Определение. Матрица $-\mathbf{A} = (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *противоположной* матрице $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Определение. *Разностью* матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такая, что $\mathbf{B} + \mathbf{X} = \mathbf{A}$. Обозн: $\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Произведением матрицы* $\mathbf{A}$ *на число* α называется матрица $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по правилу $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Обозн: $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{A}$.

Пример. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $-3 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -3 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$. *Произведением* $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ этих матриц называется матрица $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, элементы которой вычисляются по правилу:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} \quad \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}$$

Обозн: $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Операция умножения матриц определена только для матриц, у которых число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго сомножителя. Произведение матриц в общем случае не перестановочно. Произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ одновременно существуют только для матриц размера $m \times n$ и $n \times m$.

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрица $\mathbf{A}^T = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ называется *транспонированной* к матрице $\mathbf{A}$, если $a^t_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

При транспонировании матриц строки матрицы $\mathbf{A}$, становятся столбцами матрицы $\mathbf{A}^T$ с теми же номерами.

1.3 Определители.

Определение. *Определителем* квадратной матрицы $\mathbf{A}$ n-го порядка называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем произведение входит в сумму со знаком плюс, если перестановка четная и со знаком минус – если нечетная[1]. Обозн: $\det \mathbf{A} =$

[1]Два числа α_i и α_j в перестановке $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ образуют инверсию, если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$ (если большее из них стоит раньше).

$$= |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение*. Пусть известно, что такое определитель матрицы порядка $n-1$. Для матрицы $\mathbf{A}$ порядка n рассмотрим подматрицы $\mathbf{A}_{ij}$, получаемые после удаления i-й строки и j-го столбца. Тогда для всех $i \leqslant n$, $j \leqslant n$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det \mathbf{A}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det \mathbf{A}_{ij}, \quad (1)$$

и это число по определению есть *определитель* $\mathbf{A}$. Определителем матрицы размера 1×1 называется значение единственного ее элемента.

Левая часть равенства (1) представляет собой разложение Лапласа по i-й строке, а правая – по j-му столбцу матрицы $\mathbf{A}$.

Определитель второго порядка:
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

Определитель третьего порядка:
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4 + 0\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 4 = 4+0+4-1-6-0 = 1$

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant \min(m,n)$. Выберем в матрице произвольные k строк и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. На пересечении выбранных строк и столбцов стоят элементы матрицы $\mathbf{A}$, которые сами образуют квадратную матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется *минором* k-го порядка, расположенным в строках с номерами $i_1 \ldots i_k$ и в столбцах с номерами $j_1 \ldots j_k$. Обозн: $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{M}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$.

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – квадратная матрица, $\mathcal{M}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ – ее минор k-го порядка. Вычеркнем из матрицы те строки и столбцы, в которых расположен заданный минор. Тогда оставшиеся элементы матрицы сами образуют квадратную матрицу $n-k$ порядка. Определитель этой матрицы называется *дополнительным минором* к заданному минору. Обозн: $\mathcal{M}^{\delta}$, $\overline{\mathcal{M}}$.

Определение. Дополнительный минор со знаком $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору $\mathcal{M}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$. Обозн: $\mathcal{A}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$.

Свойства определителя:

Перестановка называется четной, если общее число всех инверсий в ней четно, и нечетной – в противном случае.

1). Определитель матрицы не меняется при ее транспонировании (т.е. если строки и столбцы определителя поменять местами). $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21};$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$

2). При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}\cdot a_{12} - a_{22}\cdot a_{11}$

3). Если какая-либо строка (столбец) матрицы целиком состоит из нулей, то определитель равен нулю.

$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0\cdot a_{22} - 0\cdot a_{21} = 0$

4). Если все элементы строки (столбца) умножить на число $\alpha \neq 0$, то весь определитель умножится на это число.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} \end{vmatrix} = \alpha\cdot a_{11}\cdot a_{22} - \alpha\cdot a_{12}\cdot a_{21} = \alpha\cdot(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})$

5). Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то определитель не изменится.

$\begin{vmatrix} a_{11} + c\cdot a_{21} & a_{12} + c\cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + ca_{21})a_{22} - (a_{12} + ca_{22})a_{21} = a_{11}a_{22} + \underline{ca_{21}a_{22}} - a_{12}a_{21} - \underline{ca_{22}a_{21}} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Определение. *Рангом* произвольной матрицы называется максимальный порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю. Обозн: $\mathrm{rg}\,A$.

Для вычисления ранга, исходную матрицу с помощью элементарных преобразований приводят к полудиагональному виду (к верхней или нижней трапециевидной форме), при этом ранг равен числу ненулевых элементов, стоящих на главной диагонали.

1.4 Обратная матрица.

Определение. Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ называется *обратной* к матрице $\mathbf{A}$, если $\mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{I}$ (их произведение равно единичной матрице).

Замечание: из определения следует, что обратная матрица существует только для квадратных матриц. Матрица, для которой существует обратная, называется *обратимой*.

Определение. Матрица $\mathbf{A}$ называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю и *невырожденной* в противном случае.

Определение. Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Матрица $\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}=(A_{ij})$ составленная из алгебраических дополнений $\mathcal{A}_{ij}$ к элементам a_{ij} называется *присоединенной* или *взаимной* к матрице $\mathbf{A}$.

Нахождение обратной матрицы.

I). $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\mathbf{A}^*$.

1). Вычисляют определитель исходной матрицы. Если он равен нулю, то дальнейшие вычисления не производятся – матрица вырождена, обратной несуществует;

2). Транспормируют исходную матрицу;

3). Составляют матрицу $\mathbf{A}^*$ из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы.

4) Вычисляют обратную матрицу по формуле: $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\mathbf{A}^*$.

Пример. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

1). $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$ – продолжаем вычисления;

2). $\mathbf{A}^T=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}$;

3). $A_{11}=4$, $A_{12}=-2$, $A_{21}=-3$, $A_{22}=1$, $\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$;

4). $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\mathbf{A}^*$ $\mathbf{A}^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

II). *Метод Гаусса.*

Алгоритм вычисления обратной матрицы методом Гаусса состоит в следующем преобразовании:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E})\Rightarrow(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}),$$

которое проводится посредством элементарных действий: умножении строки матрицы на число, добавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число.

Пример. Найти $\mathbf{A}^{-1}$, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ {добавляем ко второй строке первую, умноженную на -3} $\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$ {добавляем вторую строку матрицы к первой} $\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$ {умножаем вторую строку матрицы на -2} $\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$. $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

1.5 Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Определение. *Система линейных алгебраических уравнений* – система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

a_{ij} – *коэффициенты*, x_j – *неизвестные*, b_i–*свободные члены*, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение; *несовместной*, если решений нет; *однородной*, если правые части (b_i) равны нулю; *определенной*, если решение единственно; *неопределенной*, если решений более одного. Упорядоченная совокупность чисел c_j называются *решением системы*, если при подстановке их в каждое уравнение вместо неизвестных x_j все уравнения системы обращаются в тождества.

Матричная форма системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\ \text{или}$$

$$\mathbf{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}$$

Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов. $\mathbf{B}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширеной матрицы системы ($\operatorname{rg}\mathbf{A}=\operatorname{rg}\mathbf{B}$).

Способы решения СЛАУ.

1) *Правило Крамера.* Применяется для решения СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей (число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы не равен нулю). Неизвестные x_j определяются по формулам:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta};\ \ j=\overline{1,n},$$

где Δ – определитель матрицы СЛАУ, а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы СЛАУ путем замены j-го столбца столбцом свободных членов.

Пример. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$

а) $m = n = 3$, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1-1-1-1 = -4 \neq 0$

б) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2+0+1+1+0-4 = -4$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4-1+2-4+1+2 = -4$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1+0-4-2-0-1 = -8$

в) $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2$.

2) *Матричный способ* решения СЛАУ применяется если число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$) и главная матрица системы невырождена ($\det \mathbf{A} \neq 0$).

$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ – матричная форма СЛАУ. Умножим обе части равенства на $\mathbf{A}^{-1}$:

$\mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \vec{b}$

$\mathbf{E} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$$

Пример. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 4 \neq 0$. Находим обратную матрицу: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$ $\quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} \\ -1+2-0 \\ \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) *Метод Гауса* применяется для решения любых систем независимо от количества неизвестных и числа уравнений в системе. Основан на приведении расширенной матрицы системы к полудиагональному виду (при этом можно переставлять строки и столбцы матрицы, прибавлять к элементам одной строки элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, умножать строку расширенной матрицы на число). В случае несовместности системы получается строка вида $0\,0\,\ldots\,0c$ (c – любое число).

Пример. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ {прибавим ко второй строке первую, умноженную на -2; прибавим к третьей строке первую, умноженную на -1} $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ {прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -1} $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + x_3 = -3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + 3 = -3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

2 Аналитическая геометрия.

Аналитическая геоиетрия – раздел математики, изучающий свойства геометрических объектов при помощи аналитического метода. В основе этого метода лежит *метод координат*, впервые систематически примененный Декартом.[1] Возможность введения координат основывается на взаимно однозначном соответствии между множеством всех

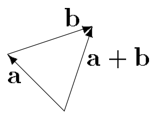
[1] Рене Декарт – французский математик и философ (1596-1650).

точек прямой и множеством всех вещественных чисел.

2.1 Векторы.

Определение. *Геометрическим вектором* (или просто *вектором*) называется направленный отрезок.[1] Обозн: $\overline{AB}$, где точка A обозначает начало вектора, а точка B – конец; или обозначается одной жирной латинской буквой: $\mathbf{a}$; или простой латинской буквой со стрелкой сверху: $\vec{a}$.

Определение. *Суммой* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\mathbf{a}$ в конец вектора $\mathbf{b}$ при условии, что вектор $\mathbf{b}$ приложен к концу вектора $\mathbf{a}$.

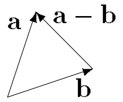


Правило сложения двух векторов, содержащееся в этом определении, обычно называют *правилом треугольника.*

Свойства правила сложения векторов:

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (*переместительное свойство*);
2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (*сочетательное свойство*);
3. существует нулевой вектор $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ для любого вектора $\mathbf{a}$ (особая роль нулевого вектора);
4. для каждого вектора $\mathbf{a}$ существует противоположный ему вектор $\mathbf{a}'$ такой, что $\mathbf{a}+\mathbf{a}'=0$.

Определение. *Разностью* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ вектора $\mathbf{a}$ и вектора $\mathbf{b}$ называется такой вектор $\mathbf{c}$, который в сумме с вектором $\mathbf{b}$ даёт ветор $\mathbf{a}$.



Правило построения разности $\mathbf{a}-\mathbf{b}$: разность $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ приведенных к общему началу векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ представляет собой вектор, идущий из конца вычитаемого вектора $\mathbf{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\mathbf{a}$.

Определение. *Произведением* $\alpha\mathbf{a}$ вектора $\mathbf{a}$ на вещественное число α называется вектор $\mathbf{b}$, коллинеарный[2] вектору $\mathbf{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha|\cdot|\mathbf{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\mathbf{a}$ в случае $\alpha>0$ и противоположное направлению вектора $\mathbf{a}$ в случае $\alpha<0$.[3]

Свойства операции умножения вектора на число:

1. $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ (распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов);
2. $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$ (распределительное свойство вектороного сомножителя относительно суммы чисел);
3. $\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}$ (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$.

Свойства скалярного произведения:

1. Два вектора ортогональны $\Leftrightarrow$[4] когда их скалярное произведение равно нулю;
2. Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ составляют острый (тупой) угол $\Leftrightarrow$ когда их скалярное произведение положительно (отрицательно);
3. $\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$ (переместительное свойство);
4. $(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{ab})$ (сочетательное относительно числового множителя свойство);
5. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ac}+\mathbf{bc}$ (распределительное относительно суммы векторов свойство);
6. $\mathbf{aa}>0$, если $\mathbf{a}$ – ненулевой вектор, и $\mathbf{aa}=0$, если $\mathbf{a}$ – нулевой вектор.

Определение.[5] *Вектором* называется матрица размерностью $(n\times 1)$ или $(1\times n)$. $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.

$\vec{a}^{\,T}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}$ – транспонированный вектор. Элементы матрицы называются *координатами вектора.* Сложение и вычитание векторов и умножение вектора на число сводятся к соответсвующей операции над матрицами:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\pm b_1\\a_2\pm b_2\\\vdots\\a_n\pm b_n\end{pmatrix}\quad c\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}c\cdot a_1\\c\cdot a_2\\\vdots\\c\cdot a_n\end{pmatrix}.$$

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется матричное произведение этих векторов (транспонированного вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(ab)=a^T\cdot b=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=$$

$=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n$ Если один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ нулевой, то скалярное произведение равно нулю.

Модулем вектора $\vec{a}$ (или его *длиной*) называется квадратный корень из скалярного

[1] Направленный – означает, что задано какой конец отрезка является началом, а какой – концом вектора.

[2] Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$ называются коллинеарными, если будучи отложенными от одной точки, они окажутся на одной прямой.

[3] В случае $\alpha=0$ получаем нулевой вектор $\mathbf{0}$.

[4] Знак $\Leftrightarrow$ читается как “тогда и только тогда”.

[5] Аналитическое определение.

произведения вектора $\vec{a}$ на самого себя: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{(aa)}$.

`Определение.` *Векторным произведением* двух векторов называется такой вектор, который перпендикулярен плоскости, образованной сомножителями, и направленный так, что кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки, т. е. вектора образуют правую тройку. В трехмерном пространстве координаты этого вектора находят в виде[1]:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$[ab] = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{k}$$

Свойства векторного произведения:

1). Векторное произведение не перестановочно: $[ab] = -[ba]$.

2). $c\vec{a} \times \vec{b} = c(\vec{a} \times \vec{b})$.

3). Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю.

4). Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами.

`Определение.` *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор ($[ab]c$).

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = (abc) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения:

1). Если поменять местами два сомножителя, то смешанное произведение изменит знак:

$(abc) = -(bac) = -(acb) = -(cba)$.

Если произвести циклическую перестановку сомножителей, то знак не изменится:

$(abc) = (bca) = (cab)$.

2). Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарны[2], то их смешанное произведение равно нулю. (Векторное произведение двух векторов перпендикулярно плоскости в которой лежат эти вектора $\Rightarrow$ образует прямой угол с третьим вектором $\Rightarrow$ их скалярное произведение равно нулю.)

3). Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Оно имеет знак "+", если векторы образуют правую тройку, и знак "$-$", если тройка левая.

`Определение.` *Базисом* в трехмерном пространстве называется любая тройка линейно независимых векторов.

Если эти векторы взаимно перпендикулярны, то получается *прямоугольный базис*, в противном случае он будет *косоугольным*.

`Теорема.` Для того чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были линейно независимыми необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение не равнялось нулю, $(abc) \neq 0$. Т. е. чтобы определитель не был равен нулю: $\Delta = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0$.

`Пример.` Найти координаты $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Проверить, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1). Проверим, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ вектора не являются линейнозависимыми, т.е. образуют базис.

2). Пусть вектор $\vec{d}$ имеет в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ координаты $\vec{d} = \{\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z\}$: $\lambda_x\vec{a} + \lambda_y\vec{b} + \lambda_z\vec{c} = \vec{d}$.

$$\begin{cases} \lambda_x\vec{a}_x + \lambda_y\vec{b}_x + \lambda_z\vec{c}_x = \vec{d}_x \\ \lambda_x\vec{a}_y + \lambda_y\vec{b}_y + \lambda_z\vec{c}_y = \vec{d}_y \\ \lambda_x\vec{a}_z + \lambda_y\vec{b}_z + \lambda_z\vec{c}_z = \vec{d}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = 2 \\ \lambda_y + \lambda_z = 0 \\ \lambda_z = -1 \end{cases}$$

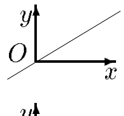
$$\begin{cases} \lambda_x = 2 \\ \lambda_y = 1 \\ \lambda_z = -1 \end{cases}$$

2.2 Уравнения прямой.

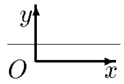
Прямая на плоскости задается алгебраическим уравнением первой степени с двумя неизвестными: $Ax + By + C = 0$, в общем случае $A, B, C \neq 0$.

Частные случаи:

1). $C = 0 \Rightarrow Ax + By = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат.

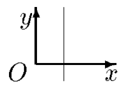


2). $A = 0 \Rightarrow By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$ – прямая, параллельная оси Ox.



3). $A = C = 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$ – ось Ox.

4). $B = 0 \Rightarrow Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$ – прямая, параллельная оси Oy.



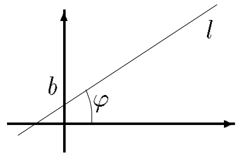
5). $B = C = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ – ось Oy.

[1] $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – векторы единичной длинны, начинающиеся в начале координат и параллельные осям координат.

[2] Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ называются компланарными, если будучи отложенными от одной точки, они окажутся на одной плоскости.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку, и имеющей заданный угловой коэффициент.

Дано: точка $M_0(x_0, y_0) \in l$[1], k – угловой коэффициент l ($k = \operatorname{tg}\varphi$). Найти уравнение, описывающее (или задающее) l.



$y = kx + b$

$Ax + By + C = 0$; $B \neq 0$ (т.к. прямая не параллельна оси Oy) $\Rightarrow By = -Ax - C$

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

$y = kx + b$

$k = \operatorname{tg}\varphi$, b найдем из условия, что l проходит через точку M_0: $y_0 = kx_0 + b$

$y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение искомой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

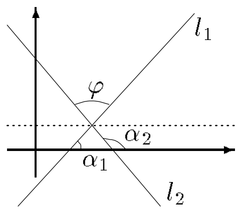
Дано: $M_0(x_0, y_0) \in l$, $M_1(x_1, y_1) \in l$. Составить уравнение l.

$y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через первую точку. Вторая точка превращает это уравнение в тождество: $y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0)$. Разделим первое на второе:

$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки.

Нахождение угла между двумя прямыми линиями.

Дано: $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$. Определить угол между l_1 и l_2 ($\angle(l_1, l_2)$).



$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$; $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ – формула, позволяющая находить угол между двумя прямыми. Если в формуле поменять ролями k_1 и k_2 получим *другой угол* между прямыми, смежный по отношению к первому.

Если $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$. Если $l_1 \perp l_2 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi$ – не существует $\Rightarrow k_1 = \frac{1}{-k_2}$.

2.3 Кривые второго порядка.

`Определение.` *Кривыми второго порядка* называется множества точек плоскости, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени с двумя неизвестными.

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

Частными случаями этих кривых являются:

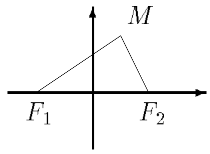
1. Окружность
2. Эллипс
3. Гипербола
4. Парабола

`Определение.` *Окружность* – множество точек плоскости, равноудаленных от заданной, называемой *центром*. Расстояние от центра до точек окружности называется *радиусом*.

Пусть $M(x, y) \in$ окружности, $M_0(x_0, y_0)$ – центр окружности, R – радиус. Составить уравнение окружности.

По определению: $|M_0M| = R$. Запишем расстояние между M и M_0 в декартовой системе координат: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$. Возведем обе части равенства в квадрат: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

`Определение.` *Эллипс* – множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$.



Пусть $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$[2] – фокусы, $M(x, y) \in$ эллипсу.

$|MF_1| + |MF_2| = 2a$ – уравнение эллипса в векторной форме.

Запишем длины векторов в декартовой системе координат:

$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

$(\sqrt{(x + c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2$

$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - - 2xc + c^2 + y^2$

$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - 2xc$

$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

$xc = a^2 - a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

$(a^2 - xc)^2 = (a\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2$

$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$

$a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. разделим обе части равенства на $a^2(a^2 - c^2)$:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса. $b^2 = a^2 - c^2$.

Свойства эллипса:

1. Кривая симметрична относительно осей координат и относительно начала координат.

2. Точки пересечения с осями координат:

$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$

$A(-a, 0)$; $C(a, 0)$

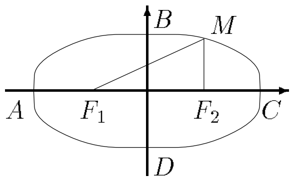
$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b \quad B(0, b)$; $D(0, -b)$

[1] l – обозначение прямой линии

[2] выбираем систему координат так, чтобы фокусы имели такие координаты

3. Вид кривой.

$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

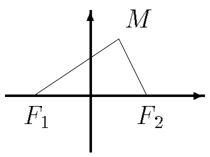


$-a \leqslant x \leqslant a$,
$-b \leqslant x \leqslant b$

AC – большая ось $(= 2a)$, BD – малая ось $(= 2b)$, F_1F_2 – фокусное расстояние $(= 2c)$.

Степень сжатия эллипса задается его *эксцентриситетом*, обозначается буквой ε. $\varepsilon = \frac{c}{a}$. При $\varepsilon = 0 \Rightarrow c = 0$ фокусы сливаются в один фокус, - эллипс вырождается в окружность. При $\varepsilon = 1 \Rightarrow b = 0$ – эллипс вырождается в отрезок.

Определение. *Гипербола* – множество точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равна $2a$.



Пусть $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы, $M(x, y) \in$ гиперболе.

$||F_1M| - |F_2M|| = 2a$ – уравнение гиперболы в векторной форме.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы. $b^2 = c^2 - a^2$.

Свойства гиперболы:

1. Кривая симметрична относительно осей координат и относительно начала координат.

2. Точки пересечения с осями координат:

$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$. $A(-a, 0)$; $B(a, 0)$ – вершины гиперболы.

$x = 0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = -b^2$ – точек пересечения с осью Oy нет.

3. Вид кривой.

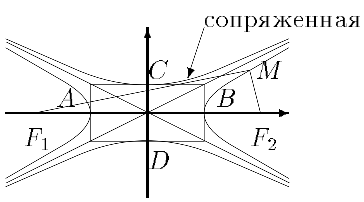
$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$

$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y$ существует только при $|x| \geqslant a$.

4. Асимптоты.

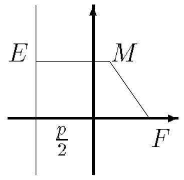
Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются асимтотами гиперболы. Они являются диагоналями характеристического прямоугольника. Характеризуются тем, что ветви гиперболы при $x \to \pm\infty$ неограниченно подходят к этим прямым, но не касаются их и не пересекают.



$\varepsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет гиперболы.

$AB(= 2a)$ – действительная ось, $CD(= 2b)$ – мнимая ось, $F_1F_2(= 2c)$ – фокусное расстояние. При $a = b$ гипербола называется равнобочной.

Определение. *Парабола* – множество точек плоскости одинаково удаленных от фокуса (фикситрованной точки) и от прямой, называемой *директрисой.*



Пусть $F(\frac{p}{2}, 0)$ – фокус, $M(x, y) \in$ параболе.

$|EM| = |FM|$ – уравнение параболы в векторной форме.

$y^2 = 2px$ – каноническое уравнение параболы.

Свойства параболы:

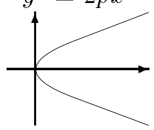
1. Парабола симметрична относительно ост Ox

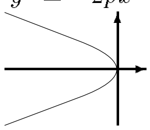
2. Вершина параболы:

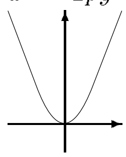
$x = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$, $O(0, 0)$ – парабола имеет одну вершину.

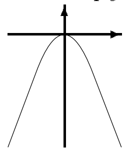
3. Вид графика.

$y = \pm\sqrt{2px}$, $x \geqslant 0, y \in \mathbb{R}$









2.4 Поверхности первого порядка.

Определение. Поверхности, которые задаются в декартовой системе координат алгебраическим уравнением первой степени с тремя неизвестными называются *поверхностями первого порядка.* Это плоскости; уравнения, которыми они задаются имеют такой вид: $Ax + By + Cz + D = 0$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}, \neq 0$ в одно и тоже время.

Частные случаи:

1. $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ – определяет плоскость, проходящую через начало координат $O(0, 0, 0) \in \alpha$[1] (поскольку кординаты начала удовлетворяют этому уравнению).

[1] α– обозначение плоскости.

2. $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$ – определяет плоскость, параллельную оси Ox.

3. $B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$ – определяет плоскость, параллельную оси Oy.

4. $C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$ – определяет плоскость, параллельную оси Oz.

5. $A = D = 0 \Rightarrow By + Cz = 0$ – плоскость проходит через ось Ox.

6. $B = D = 0 \Rightarrow Ax + Cz = 0$ – плоскость проходит через ось Oy.

7. $C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$ – плоскость проходит через ось Oz.

8. $A = B = D = 0 \Rightarrow Cz = 0 \Rightarrow z = 0$ – координатная плоскость Oxy.

9. $B = C = D = 0 \Rightarrow x = 0$ – координатная плоскость Oyz.

10. $A = C = D = 0 \Rightarrow y = 0$ – координатная плоскость Oxz.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Дано: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка, $\in \alpha$. Составим уравнение плоскости. Векторы $\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC} \in \alpha$ – компланарные векторы (лежат в одной плоскости) $\Rightarrow$ их смешанное произведение равно нулю:

$[\vec{AM} \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AC}] = 0$ – уравнение плоскости в векторной форме.

$\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Смешанное произведение трех векторов $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Найдем связь между выведенным уравнением плоскости и уравнением плоскости в общем виде:

$(x - x_1) \cdot \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - (y - y_1) \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + (z - z_1) \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$, $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$

$Ax + By + Cz + D = 0$

Рассмотрим вектор $\vec{N} = (A, B, C)$. $\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Найдем их скалярное произведение: $\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$, значит, $\vec{AM} \perp \vec{N}$. $\vec{N}$– является *нормальным вектором плоскости* α.

2.5 Уравнения прямой в пространстве.

Прямую можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{matrix} \alpha: \\ \beta: \end{matrix} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

$\left(\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} -D_1 \\ -D_2 \end{matrix}\right)$ – исследуем систему методом Гауса. При этом возможны следующие случаи:

1). Система уравнений совместна и имеет единственное решение. (В случае, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной).

2). Система уравнений имеет бесчисленное множество решений. В этом случае плоскости совпадают. (В случае, когда ранг основной матрицы меньше ранга расширенной матрицы).

3). Система не имеет решений. В этом случае плоскости не пересекаются, т.е. параллельны. (В случае, когда одна строка является линейной комбинацией другой, или когда векторное произведение векторов $(\overrightarrow{A_1, B_1, C_1})$ и $(\overrightarrow{A_2, B_2, C_2})$ равно нулю.)

Параметрическое уравнение прямой.

Пусть $\vec{a}$ с координатами $(l, m, n) \in l$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z) \in l$. Составим уравнение прямой. $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Векторы $\vec{M_0M}$ и $\vec{a}$ – коллинеарные. Следовательно их координаты пропорциональны:

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$

$\begin{cases} x - x_0 = l \cdot t \\ y - y_0 = m \cdot t \\ z - z_0 = n \cdot t \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой. $\vec{a} = (l, m, n)$ – направляющий вектор прямой (либо лежащий на прямой, либо параллельный ей).

2.6 Поверхности второго порядка.

`Определение.` *Поверхностями второго порядка* называются поверхности, которые задаются в декартовой системе координат уравнениями второй степени с тремя неизвестными.

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Exy + Fxz + Kyz + Mx + Ny + Pz + Q = 0$, $A, B, C, E, F, K, M, N, P, Q \in \mathbb{R}$.

Частные случаи:

1). $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ – сферическая поверхность (или просто сфера). Координаты центра сферы: $O(x_0, y_0, z_0)$. R – радиус.

2). $x^2 + y^2 = 1$ – прямой круговой цилиндр с образующей, параллельной оси Oz.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр, с образующей, параллельной оси Oz.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр, с образующей, параллельной оси Oz.

$x^2 = 2py$ – параболический цилиндр, с образующей, параллельной оси Oz.

3). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид.

4). $x^2+y^2=z^2$ – прямой круговой конус.
$x^2+y^2=0$ – точка.
$x^2+y^2=1$ - окружность.
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ – эллиптический конус.

3 Комплексные числа.

Определение. *Комплексным числом* называется число вида $z=a+bi$. a – *действительная часть*, b – *мнимая часть*, i – мнимая единица: $i=\sqrt{-1}$; $i^2=-1$.

Сложение комплексных чисел: $z_1\pm z_2=(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_2\pm b_2)i$.

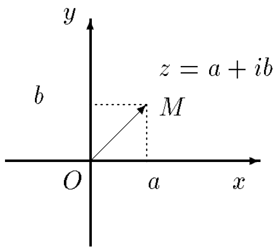
Определение. Число z^* называется *сопряженным* комплексным числом для числа $z=a+bi$, если оно равно $z^*=a-bi$.

Модуль комплексного числа равен $|z|=\sqrt{z\cdot z^*}=\sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)}=\sqrt{a^2-b^2i^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Произведением двух комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число вида $z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_2b_1i+a_1b_2i+b_1b_2i^2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)i$

Частным двух комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число вида $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot z_2^*}{z_2\cdot z_2^*}=\frac{(a_1+ib_1)\cdot(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)\cdot(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+ib_1a_2-ia_1b_2-i^2b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$.

Геометрический образ комплексного числа.



Существует взаимно однозначное соответсвие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек плоскости, при этом по горизонтальной оси Ox откладывают действительную часть, а по вертикальной оси Oy - мнимую часть.

$|OM|=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$

Формула Эйлера: $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$. Вывод: Пусть r, φ – полярные координаты точки плоскости. Тогда декартовы координаты этой точки выражаются через них как $x=r\cdot\cos\varphi$ и $y=r\cdot\sin\varphi$. Следовательно любое комплексное число $z=x+iy$, $z\neq 0$ представляется в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа.

$z=|z|\cdot e^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа.

Для возведения комплексного числа в *n-ю степень*, необходимо возвести в эту степень модуль комплексного числа и увеличить в n раз угол φ: $z^n=|z|^n\cdot e^{i\varphi n}$ (формула Муавра).

Пример. $z=1+i$. Найти z^4.

$z^2=(1+i)\cdot(1+i)=1+i+i+i^2=1-1+2i=2i$

$z^4=2i\cdot 2i=4i^2=-4$

Или: $z=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z^4=(\sqrt{2})^4e^{i\pi}=4\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=4\cdot -1=-4$.

Корень n-ой степени из комплексного числа извлекается по формуле: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i(\frac{\varphi+2\pi k}{n})}$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Пример. $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1+0\cdot i}=\{\varphi=\operatorname{arctg}\frac{0}{1}=0\}=\sqrt[3]{1\cdot(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[3]{1\cdot e^{i\cdot 0}}=1\cdot e^{i\cdot\frac{0+2\pi k}{3}}=\left\{1,e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$

4 Числовые последовательности и пределы.

Определение. Упорядоченное множество чисел, каждое из которых имеет свой номер, называется последовательностью: $x_n=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$, где x_n – общий член последовательности.[1]

Примеры.

$1,2,3,\ldots,n,\ldots$

$-1,1,-1,\ldots,(-1)^n,\ldots$

$\frac{1}{2},\frac{4}{13},\ldots,\frac{2n}{3n^2+1},\ldots$

Определение. Число a называется *пределом последовательности* x_n, если для $\forall\delta>0$ найдется такой номер N, что, начиная с этого номера, выполняется $|x_n-a|<\delta$ при $n\geqslant N$. Обозн: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

δ-окрестностью точки a называется интервал $(a-\delta,a+\delta)$. В δ-окрестности предельной точки последовательности и только в ней, находится бесконечное число элементов этой последовательности. Если существует окрестность, для которой это условие нарушается, то эта точка не является предельной.

Определение (эквивалентное). Число a называется пределом последовательности x_n, если начиная с некоторого номера N все элементы этой последовательности оказываются в δ-окрестности точки a.

Числовая последовательность называется *бесконечно малой*, если ее предел равен 0. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow a_n$ – бесконечно малая.

Пример. $\left\{\frac{1}{n^2+3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n-10}\right\}$ – бесконечно малые.

[1] **Опреление из лекций:** Числовой последовательностью называется числовая функция натурального аргумента.

Числовая последовательность называется *бесконечно большой*, если ее предел равен бесконечности. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \Rightarrow b_n$ – бесконечно большая.

Пример. $\{n^2+3\}$, $\{n\}$ – бесконечно большие.

Величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот. Если a_n – бесконечномалая $\Rightarrow \frac{1}{a_n}$ – бесконечно большая.

4.1 Действия над пределами.

1). Если существуют пределы слагаемых, то предел суммы равен сумме пределов.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2). Если существуют пределы сомножителей, то предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3). если существуют пределы делимого и делителя и предел делителя не равен нулю, то предел частного равен частному пределов.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

4). Если предел существует, то он единственный.

5). Если выполняется неравенство $c_n \leqslant a_n \leqslant b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ (правило двух милиционеров).

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, $\infty-\infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{6n-8n^2+5} = \{\ \frac{\pm\infty}{-\infty}$, разделим числитель и знаменатель на $n^2\} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{6}{n}-8+\frac{5}{n^2}} = \frac{3}{-8} = -\frac{3}{8}$

Если вычисляют предел дроби в числителе и знаменателе которой стоят многочлены, то предел дроби равен отношению коэффициентов при старшей степени числителя и знаменателя.

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x-3}-1)\cdot(\sqrt{x-3}+1)}{(x-4)\cdot(\sqrt{x-3}+1)} = = \lim\limits_{x\to 4}\frac{x-3-1}{(x-4)\cdot(\sqrt{x-3}+1)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} =\{$ вместо x подставляем $4\} = \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(n-2-\sqrt{n+1}) = \{\infty - -\infty\} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-2-\sqrt{n+1})(n-2+\sqrt{n+!})}{n-2+\sqrt{n+1}} = = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-4n+4-n-1}{n-2+\sqrt{n+1}} = \infty.$

4.2 Предел функции.

Определение. Пусть задано два множества чисел $x \in D$, $y \in G$ и пусть по определённому закону каждому x сопоставляется y ($\forall x \in D \Rightarrow y \in G$), тогда говорят, что на множестве D определена *функция* $y = f(x)$, при этом D – называется областью определения функции, x – независимая переменная или аргумент, y – зависимая переменная или функция.

Функции задаются: а) графически; б) аналитически: $y = x^2$; в) таблично.

Определение (предела функции по Гейне[1]). Число b называется *пределом* (или предельным значением) функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любой последовательности значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящейся к a и состоящей из чисел x_n, отличных от a, соответсвующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к числу b.

Определение (предела функции по Коши[2]). Число b называется *пределом* (или предельным значением) функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$. Обозн: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Частные случаи предела:

1). Предел $f(x) = +\infty$ при $x \to x_0$.
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists\delta(M) > 0 : \forall x : |x - - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

2). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0\ \exists\delta(M) > 0 : \forall x : |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M$

3). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists\delta(M) > 0 : \forall x : |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$

4). $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : x > \delta \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$

5). $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) : \forall x : x < \delta \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$

Предел функции слева и справа.

Определение (правый [левый] предел функции по Гейне).
Число b называется *правым пределом* [*левым пределом*] функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к a и состоящей из чисел бóльших a [меньших a], соответсвующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b.

Определение (правый [левый] предел функции по Коши).

[1] Генрих Эдуард Гейне – немецкий математик (1821-1881)

[2] Огюстен Луи Коши – французский математик (1789-1857)

Число b называется *правым пределом* [*левым пределом*] функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$ [условию $a - \delta < x < a$], справедливо неравенство $|f(x) - - b| < \varepsilon$. Обозн: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ [$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$] или $f(a+0) = b$ [$f(a-0) = b$].

Необходимым и достаточным условием существования предела в данной точке является $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$. Это условие также является условием непрерывности в точке a, если это условие нарушается, то в точке a функция иммет разрыв:

а) точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если пределы слева и справа существуют, конечны, но не равны друг другу;

б) если один из этих пределов не существует или является бесконечным, то эта точка называется *точкой разрыва второго рода*.

4.3 Непрерывность функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ на интервале (a, b). Пусть x – любая фиксированная точка интервала (a, b), а Δx – произвольное число, настолько малое, что значение $x + \Delta x$ также находится на интервале (a, b). Это число Δx обычно называют *приращением аргумента.*

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x, отвечающим приращению аргумента Δx, называется число

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

`Определение.` Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечномалому приращению аргумента в этой точке соответсвует бесконечномалое приращение функции.

$f(x)$ – непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow \Delta f(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

`Определение.` Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке*, если она непрерывна во всех точках этого отрезка.

Примерами непрерывных функций являются все элементарные функции в области своего определения.

Свойства непрерывных функций:

1). Если функция непрерывна на отрезке и на концах отрезка значения функции имеют разные знаки, то функция обязательно обращается в 0 во внутренней точке этого отрезка.

2). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нём наибольшего и наименьшего значения.

5 Дифференциальное исчисление.

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применения к исследованию функций.

Понятие производной возникло из большого числа задач естествознания и математики, приводящихся к вычислению пределов отношений некоторого типа бесконечно малых. Важнейшие из них — построение касательной к кривой и определение скорости движения точки.

Понятие дифференциала является математическим выражением близости функции к линейной в малой окрестности рассматриваемой точки.

5.1 Понятие производной

Определение производной.

Считая, что $\Delta x \neq 0$, рассмотрим в данной *фиксированной* точке x отношение приращения Δy функции $y = f(x)$ в этой точке к соответсвующему приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Отношение (2) называется *разностным отношением* (в данной точке x).

`Определение.` *Производной функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x называется предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения (2) (при условии, что этот предел существует).*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

`Пример 1.` $f(x) = C = const$. Очевидно, что производная f'(x) этой функции тождественно равна нулю, ибо приращение этой функции $\Delta y = f(x + + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$ *равно нулю для всех x и всех Δx.*

`Пример 2.` $f(x) = x$. Для этой функции разностное отношение (2) равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Отсюда следует, что и производная указанной функции равна единицы в любой точке x бесконечной прямой.

Пример 3. $f(x) = \sin x$. $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$, откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$. Так как $\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \to \cos x$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции $\cos x$, а $\frac{\sin t}{t} \to 1$ при $t \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \cos x$ при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Производные справа и слева.

Определение. *Производной слева* [*производной справа*] в фиксированной точке x называется предел онтношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю слева [справа].

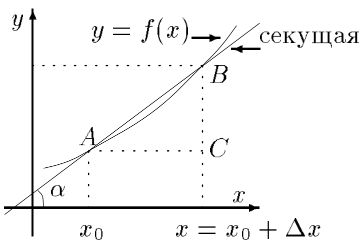
$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$\left[f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$

Производная в точке x_0 существует, если производные справа и слева существуют и равны между собой.

Геометрический смысл производной.

Предельное положение, которое занимает секущая, при условии, что $x \to x_0$ называется *касательной.*



Геометрически число $f'(x)$ представляет собой угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x). \qquad (3)$$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке x_0.

Нормалью называется прямая, перепендикулярная касательной. $f(x) - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ – уравнение нормали.

Пример 4. *Под каким углом график функции $y = \sin x$ пересекает ось Ox ?* Синусоида пересекает ось абсцисс в точках $x_k = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Пусть α_k – угол между осью Ox и графиком функции в точке с абсциссой x_k. По формуле (3), где $f(x) = \sin x$, находим

$$f'(x_k) = \cos k\pi = (-1)^k = \operatorname{tg}\alpha_k.$$

Следовательно, в точках $x'_k = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ синусоида пересекает ось Ox под углом $\frac{\pi}{4}$, а в точках $\tilde{x}_k = (2k+1)\pi$ – под углом $\frac{3}{4}\pi$.

Бесконечная производная. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

то говорят, что в точке x функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную.* В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x перпендикулярна к оси Ox.

Пример 5. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$. $f'(0) = +\infty$, т. к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty$$

5.2 Основные правила и формулы нахождения производной.

Если c - постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ имеют производные, то

1) $c' = 0$;

2) $(cu)' = cu'$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(u \pm v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u) \pm (v+\Delta v) - (u \pm v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u + \Delta u \pm v \pm \Delta v - u \mp v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u'(x) \pm v'(x)$

4) $(uv)' = u'v + v'u$;

$(uv)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{uv + v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}\right) = u'v + uv' + u' \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = \{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0\} = u'v + v'u$

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n – постоянное число);

7) если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Если x – независимая переменная, то

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n – постоянное число).

II. $(\sin x)' = \cos x$.

III. $(\cos x)' = -\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

V. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

IX. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

X. $(a^x)' = a^x \ln a$, $\qquad (e^x)' = e^x$.

XI. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0)$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(a > 0, a \neq 1; x > 0)$.
XII. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
XIII. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
Где $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Производная обратной функции. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ $(a < x < b)$ с производной $f'(x) \neq 0$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция также дифференцируема и справедлива формула

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Производная функции, заданной параметрически. Система уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$, определяет y, в некоторой области, как однозначную дифференцируемую функцию от x:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

причем производная этой функции может быть найдена по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производная функции, заданной в неявном виде. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

где $F(x, y)$ рассматривается как сложная функция переменной x.

Логарифмическое дифференцирование применяется если функция содержит несколько сомножителей в числителе и в знаменателе. Сначала логарифмируются обе части равенства, затем вычисляется производная:

$y = \frac{(x-3)^3(2x-4)^6}{(x+5)^{10}(3x+7)^4}$
$\ln y = \ln \frac{(x-3)^3(2x-4)^6}{(x+5)^{10}(3x+7)^4}$
$(\ln y)' = (3\ln(x-3) + 6\ln(2x-4) - 10\ln(x+5) - 4\ln(3x+7))'$
$\frac{1}{y} y' = 3\frac{1}{x-3} + 6\frac{2}{2x-4} - 10\frac{1}{x+5} - 4\frac{3}{3x+7}$
$y' = \left(\frac{3}{x-3} + \frac{6}{x-2} - \frac{10}{x+5} - \frac{12}{3x+7}\right) \cdot \frac{(x-3)^3(2x-4)^6}{(x+5)^{10}(3x+7)^4}$

5.3 Дифференциал функции

Дифференциал функции. Если приращение функции $y = f(x)$ от независимой переменной x может быть представлено в виде

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

где $dx = \Delta x$, то линейная часть этого приращения называется *дифференциалом функции* y:

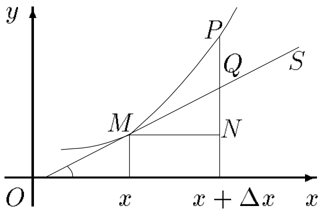
$$dy = A(x)dx.$$

Теоремы 1,2: Для существования дифференциала функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y' = f'(x)$. Причем имеем:

$$dy = y'\,dx. \tag{4}$$

Формула (4) сохраняет свою силу и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (*свойство инвариантности первого дифференциала*).

Геометрический смысл дифференциала.



Дифференциал функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 при изменении аргумента от x_0 до $x_0 + \Delta x$.

Величина отрезка NP – приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x, отвечающее приращению аргумента Δx, в то время как дифференциал dy этой функции в точке x, отвечающий тому же самому Δx, равен величине отрезка NQ. Величины отрезков NP и NQ являются, вообще говоря, различными.

Оценка малых приращений функции. Если Δx достаточно мало, то приращение функции в точке x_0 приближенно равно дифференциалу этой функции:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0),$$

т.е.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

относительная погрешность которой сколь угодно мала при достаточно малом $|\Delta x|$, если $f'(x) \neq 0$. Т.е. чем меньше Δx, тем точнее результат.

5.4 Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)

1-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности U_ε [1] точки a, где a – число или символ ∞, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности U_ε точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$; 3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то имеем:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ обе стремятся к бесконечности:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

где a – число или символ ∞; 2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют для всех x, принадлежащих некоторой окрестности U_ε точки a и отличных от a, причем

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \text{ при } x \in U_\varepsilon \text{ и } x \neq a;$$

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные правила справедливы для односторонних пределов.

Раскрытие неопределенностей видов $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 и т. п. путем алгебраических преобразований и логарифмирования приводится к раскрытию неопределенностей двух основных типов:

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}.$$

[1] Под окрестночтью U_ε точки a понимается совокупность чисел x, удовлетворяющих неравенству: 1) $0 < |x - a| < \varepsilon$, если a – число, и 2) $|x| > 1/\varepsilon$, если a – символ ∞.

5.5 Производные и дифференциалы высших порядков.

Основные определения. *Производные высших порядков* от функции $y = f(x)$ определяются последовательно соотношениями (предполагается, что соответсвующие операции имеют смысл!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \;\; (n = 2, 3, \ldots)$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b), то кратко пишут: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на (a, b), то употребляется запись: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

Дифференциалы высших порядков от функции $y = f(x)$ последовательно определяются формулами

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \;\; (n = 2, 3, \ldots),$$

где принято $d^1 y = dy = y' dx$.

Если x – независимая переменная, то полагают:

$$d^2 x = d^3 x = \ldots = 0.$$

В этом случае справедливы формулы

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \;\text{ и }\; y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Основные формулы.

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \;\; (a > 0)$; $\;(e^x)^{(n)} = e^x$.

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

V. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}$.

5.6 Формула Тейлора.

Если 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $|x - x_0| < \varepsilon$ точки x_0; 2) $f(x)$ имеет в этой окрестности производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно; 3) в точке x_0 существует производная n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n, \tag{5}$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \;\; (k = 0, 1, \ldots, n).$$

В частности, при $x_0 = 0$ имеем (формула Маклорена):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{6}$$

При указанных условиях представление (5) единственно.

Из формулы Маклорена (6) получаем следующие пять важных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$.

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

5.7 Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Теоремы о среднем.

Определение. *Локальным экстремумом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется такое значение функции, которое удовлетворяет условию min или max функции в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* $\{$*точкой локального минимума*$\}$, если существует окрестность этой точки, такая, что для всех x из этой окресности выполнено неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$ $\{f(x_0) \leqslant f(x)\}$.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в окрестности этой точки, то $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ внутри этого сегмента; 3) $f(a) = f(b)$, то существует по меньшей мере одно число c из интервала (a,b) такое, что

$$f'(c) = 0.$$

Теорема Лагранжа. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на интервале (a,b), то

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \text{ где } a < c < b.$$

(*формула конечных приращений*).

Теорема Коши. Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на сегменте $[a,b]$; 2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале (a,b); 3) $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; 4) $g(a) \neq g(b)$, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ где } a < c < b.$$

5.8 Возрастание и убывание функции.

Возрастание и убывание функции. Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на сегменте $[a,b]$, если

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$$

(или соответсвенно $f(x_2) < f(x_1)$ при $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$).

Если дифференцируемая функция f(x) возрастает (убывает) на сегменте $[a,b]$, то

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b$$
$$(\text{или } f'(x) \leqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b).$$

Достаточный признак возрастания (убывания) функции. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и внутри него имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a,b]$.

5.9 Направление вогнутости. Точки перегиба.

Достаточные условия вогнутости. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* или *выпуклым вниз* (*вогнутым вниз* или *выпуклым вверх*) на сегменте $[a,b]$, если отрезок кривой

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

расположен выше (соответсвенно ниже) касательной, проведенной в любой точке этого отрезка. Достаточным условием вогнутости графика вверх (вниз), в предположении существования второй производной $f''(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, является выполнение неравенства

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \text{при } a < x < b.$$

Достаточное условие точки перегиба. Точки, в которых меняется направление вогнутости графика функции, называется *точками перегиба*. Точка x_0, для которой либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует, причем $f'(x_0)$ имеет смысл, есть точка перегиба, если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через значение x_0.

5.10 Асимтоты.

Определение.$^{\text{из лекций}}$ *Асимптотой графика* называется прямая, к которой приближаются точки графика, при этом график функции не касается асимтоты и не пересекает ее.

`Определение.`$^{\text{геометрическое}}$ *Асимптотой* называется прямая, к которой стремится кривая в бесконечно удаленной точке.

`Определение.`$^{\text{аналитическое}}$ *Асимптотой* называется линейная функция, эквивалентная заданной функции в бесконечно удаленной точке.

Виды асимптот:

I. Горизонтальные. Прямую $y = b$ называют *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - b) = 0$. Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \to -\infty$.

II. Вертикальные. Если выполнено хотя бы одно из условий $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$, то прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

III. Наклонные. Прямую $y = kx+b$, $k \neq 0$ называют *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0.$$

5.11 План исследования функции.

Для исследования функции $y = f(x)$ нужно:
1) определить область определения этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках последней;
2) определить область значения функции;
3) определить четность/нечетность: $f(-x) = f(x)$ – четная; $f(-x) = -f(x)$ – нечетная;
4) выяснить периодичность: $f(x) = f(x + t)$;
5) найти критические точки, определить промежутки монотонности;
6) найти точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости;
7) найти асимптоты графика;
8) найти точки пересечения с осями координат;
9) построить эскиз графика

6 Интегральное исчисление

Интегральное исчисление – раздел математики, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования.

Интегральное исчисление возникло из задач на определение площадей и объемов.

6.1 Неопределенный интеграл.

Понятие неопределенного интеграла. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a, b) и $F(x)$ - ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

где C - некоторая постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла.

а). $\int dF(x) = F(x) + C$
б). $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$
г). $\int[\mathrm{C}f(x)]\,dx = \mathrm{C}\int f(x)\,dx$ $(\mathrm{C} = const, \mathrm{C} \neq 0)$
в). $\int[f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Таблица основных неопределенных интегралов.

1°. $\int 0 \cdot dx = C$
2°. $\int 1 \cdot dx = x + C$
3°. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
4°. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$
5°. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;\; (0 < a \neq 1)$, $\int e^x\,dx = e^x + C$
6°. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7°. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int(1 + \mathrm{tg}^2)\,dx = \mathrm{tg}\,x + C$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \;\; n = 0, \pm1, \ldots)$
9°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int(1 + \mathrm{ctg}^2)\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + C$ $(x \neq \pi n, \;\; n = 0, \pm1, \ldots)$
10°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (-1 < x < 1)$
11°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,x + C, \\ -\mathrm{arcctg}\,x + C \end{cases}$
12°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$
(в случае знака "минус" либо $x > 1$, либо $x < -1$)
13°. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + C \quad (|x| \neq 1)$
14°. $\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$
15°. $\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$

6.2 Основные методы интегрирования

Интегрирование с помощью поправок.
1. $f(x)dx = f(x + c)d(x + c)$
2. $\frac{1}{c}f(cx)d(cx) = f(x)dx$

`Пример 1.` $\int(x + 5)^{17}dx = \int(x + 15)^{17}d(x + 5) = \frac{(x+5)^{18}}{18} + C$

`Пример 2.` $\int e^{3x+4}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+4}d(3x + 4) = \frac{1}{3}e^{3x+4} + C$

Интегрирование заменой переменной (подстановкой). *Пусть функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на множестве x, представляющем собой либо интервал, либо открытую полупрямую, и пусть символ t обозначает множество всех значений этой функции.*

Пусть, далее, для функции $g(t)$ существует на множестве t первообразная функция $G(t)$, т.е.

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C.$$

Тогда всюду на множестве x для функции $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G[\varphi(x)]$, т.е.

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C$$

Предположим, что требуется вычислить интеграл

$$\int f(x)\,dx. \qquad (7)$$

В ряде случаев удается выбрать в качестве новой переменной такую дифференцируемую функцию $t = \varphi(x)$, что имеет место равенство

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

причем функция $g(t)$ легко интегрируется, т.е. интеграл

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C$$

просто вычисляется. Утверждение, приведенное выше, позволяет написать следующую формулу для интеграла (7):

$$\int f(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C$$

Этот прием вычисления интеграла (7) и называется *интегрированием путем замены переменной.*

`Пример 1.` Вычислить $\int \sin 3x\,dx$. Для вычисления этого интеграла следует сделать простейшую подстановку $t = 3x$, $dt = 3dx$. В результате этой замены получим

$$\int \sin 3x\,dx = \int \frac{1}{3}\sin t\,dt =$$
$$= -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

`Пример 2.` Вычислить $\int \frac{dx}{x+a}$. Этот интеграл вычисляется посредством замены $t = x + a$, $dt = dx$. При этом получим

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C \quad (x \neq a)$$

`Пример 3.` Вычислить $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$. Легко видеть, что этот интеграл вычисляется путем замены $t = \cos x$. При этом $dt = -\sin x\,dx$ и

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

Интегрирование по частям. *Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве x и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве x существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \qquad (8)$$

Вычисление интеграла посредством применения формулы (8) и называют *интегрированием по частям.*

`Пример 1.` Вычислить интеграл $I = \int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq -1)$. Положив $u = \ln x$, $dv = x^n dx$ и используя формулу (8), получаем $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

`Пример 2.` Вычислить интеграл $I = \int x^2\cos x\,dx$. Сначала применим формулу (8), полагая $u = x^2$, $dv = \cos x\,dx$. Получим $du = 2x\,dx$, $v = \sin x$, $I = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$. Для вычисления последнего интеграла еще раз применем формулу (8), полагая на этот раз $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Получим $du = dx$, $v = -\cos x$, $I = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int\cos x\,dx = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$.

Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

1. $\int \frac{u'\,dx}{u} = \int \frac{d(u(x))}{u(x)} = \ln|u(x)| + C$

`Пример.` $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x+3} = \int \frac{(\sin x+3)'}{\sin x+3}dx = \int \frac{d(\sin x+3)}{\sin x+3} = \ln|\sin x+3| + C$

2. $\int \frac{u'\,dx}{\sqrt{u}} = \int \frac{d(u(x))}{\sqrt{u(x)}} = \frac{\sqrt{u(x)}}{2} + C$

`Пример.` $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x-1}} = \int \frac{(\ln x-1)'dx}{\sqrt{\ln x-1}} = \int \frac{d(\ln x-1)}{\sqrt{\ln x-1}} = \frac{\sqrt{\ln x-1}}{2} + C$

6.3 Интегрирование выражений, содержащие квадратные трёхчлены.

1. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

В квадратном трехчлене (в обоих случаях) выделяется полный квадрат, затем применяется одна из формул:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right| + C$$

Пример 1. $\int \frac{dx}{x^2-8x+4} = \int \frac{dx}{(x^2-2\cdot 4x+16)-16+4} = \int \frac{dx}{(x-4)^2-12} = \int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2-12} = \frac{1}{2\sqrt{12}}\ln\left|\frac{x-4+\sqrt{12}}{x-4-\sqrt{12}}\right| + C$

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot 2x+4-4-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-7}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-7}} = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}\right| + C$

2. $\int \frac{(mx+n)}{ax^2+bx+c}dx$; $\quad \int \frac{(mx+n)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

В этом случае применяется прием выделения в числителе производной знаменателя, затем выделяется полный квадрат и вычисление интеграла сводится к первому случаю.

Пример. $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \int \frac{2dx}{x^2+2x+5}\right) = \frac{1}{2}\left(\int \frac{(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4}\right) = \frac{1}{2}\left(\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} - 2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|x^2+2x+5| - 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$

6.4 Интегрирование дробно-рациональных функций.

Определение. *Дробно-рациональной* называется функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ являются многочленами некоторой степени.

В этом случае для интегрирования сначала выделяется целая часть, а оставшаяся правильная дробь раскладывается на сумму простейших дробей вида:

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{Bx+C}{x^2+a^2};\ \frac{D}{(x-a)^2}$$

Если в знаменателе дроби содержится только линейные множители $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, то разложение содержит n слагаемых.

Если в знаменателе содержатся множители вида $(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_n)^{k_n}$, то разложение содержит $k_1+k_2+\ldots+k_n$ слагаемых и т. д.

Если в знаменателе содержатся множители вида $(x^2+a_1^2)\dots(x^2+a_k^2)$, то количество слагаемых равно k, а множители в числителе имеют вид $(A_1x+B_1),\dots,(A_kx+B_k)$.

Числители правильных дробей находят либо способом подстановки численных значений, либо методом неопределенных коэффициентов.

Пример 1. $I = \int \frac{x^3-x^2-4x}{x^2+2}dx$. Выделим целую часть:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 4x & x^2+2 \\ \underline{x^3 + 2x} & \overline{x-1} \\ \quad -x^2 - 6x & \\ \quad \underline{-x^2 - 2} & \\ \qquad -6x + 2 & \end{array}$$

$I = \int\left(x-1-\frac{6x-2}{x^2+2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - x - \int \frac{6x}{x^2+2}dx + 2\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x^2}{2} - x - 3\int \frac{(x^2+2)'dx}{x^2+2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C = \frac{x^2}{2} - x - 3\int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C = \frac{x^2}{2} - x - 3\ln(x^2+2) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

Пример 2. $I = \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{x^2+x-1}{x(x^2-x-2)}dx = \int \frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}dx$

$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$

$x^2+x-1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$

метод подстановки численных значений.

$x=0:\ \ -1 = A\cdot 1\cdot(-2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$x=-1:\ \ 1-1-1 = B\cdot(-1)\cdot(-3) \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

$x=2:\ \ 4+2-1 = C\cdot 2\cdot 3 \Rightarrow C = \frac{5}{6}$

метод неопределенных коэффициентов.

$x^2+x-1 = A(x^2-2x+x-2) + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Cx$

$x^2+x-1 = Ax^2+Bx^2+Cx^2-Ax-2Bx+Cx-2A$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 1 = A+B+C \\ x^1 & 1 = -A-2B+C \\ x^0 & -1 = -2A \end{array} \qquad \begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-2B+C=1 \\ -2A=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1/2 \\ -B+2C=2 \\ A+B+C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1/2 \\ A+3C=3 \\ A+B+C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1/2 \\ 3C=3-1/2 \\ B+C=1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1/2 \\ C=5/6 \\ B=-1/3 \end{cases}$$

$I = \int \frac{1/2}{x}dx + \int \frac{-1/3}{x+1}dx + \int \frac{5/6}{x-2}dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{6}\ln|x-2| + C = \ln\frac{|x|^{1/2}\cdot|x-2|^{5/6}}{|x+1|^{1/3}} + C = \ln\frac{\sqrt{|x|}\cdot\sqrt[6]{|x-2|^5}}{\sqrt[3]{|x+1|}} + C$

6.5 Интегрирование иррациональных выражений.

1. Сведение к табличным интегралам.

Пример. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3/2x-1/2}} = \left\{ x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = (x+\frac{3}{4})^2 - \frac{17}{16} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x+\frac{3}{4})}{\sqrt{(x+\frac{3}{4})^2 - \frac{17}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}} \right| + C$

2. Замена переменных, приводящая к избавлению от иррациональности под знаком интеграла.

Для избавления от иррациональности в интеграле $\int R\left(\sqrt[m_1]{ax+b}, \sqrt[m_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[m_k]{ax+b} \right) dx$ используется замена вида $\sqrt[m]{ax+b} = t$, где m – наименьшее общее кратное $m_1, m_2, \ldots, m_k$ $(m = \text{НОК}(m_1, m_2, \ldots, m_k))$.

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = t \\ x = t^6 \\ dx = (t^6)'dt \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right.$ $= \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2(t+1)} = \int \frac{6t^3 dt}{t+1} = \int (6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}) dt = \frac{6t^3}{3} - 6\frac{t^2}{2} + 6t - 6\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$

6.6 Интегрирование тригонометрических функций.

1. Интегрирование выражений, содержащих произведение синусов и косинусов.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

1) Если m или n является нечетным, то из сомножителя, содержащего нечетную степень выделяется первая степень $\sin x$ или $\cos x$, – она вносится под знак дифференциала. В оставшейся функции переходят к функции, стоящей под знаком дифференциала.

Пример. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, d(\sin x) = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)\, d(\sin x) = \int (\sin^2 x - \sin^4 x)\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$

2) m и n – четные. Используются формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \ \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Пример. $\int \sin^4 2x\, dx = \int (\sin^2 2x)^2 dx = \int (\frac{1-\cos 4x}{2})^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx = \frac{1}{4}(x - 2\frac{\sin 4x}{4} + \int \cos^2 4x\, dx) = \frac{1}{4}(x - \frac{\sin 4x}{2} + \int \frac{1+\cos 8x}{2} dx) = \frac{1}{4}(x - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 8x}{8})) + C = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 8x}{64} + C$

2. Интегрирование выражений вида

$$\int \operatorname{tg}^m x\, dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

При интегрировании выделяется $\operatorname{tg}^2 x$ и заменяется по формуле $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

Пример. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x\, dx = \int \operatorname{tg} x (\frac{1}{\cos^2 x} - 1) dx = \int \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg} x\, dx = \int \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x)' dx - \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = \int \operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

3. Интегрирование выражений вида

$$\int \operatorname{tg}^m x\, dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

При интегрировании выделяется вторая степень $\operatorname{ctg} x$ и заменяется по формуле $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

4. Интегрирование выражений вида $\int \sin nx \sin mx\, dx$, $\int \cos nx \cos mx\, dx$, $\int \cos nx \sin mx\, dx$, $m \in \mathbb{N}$.

При интегрировании применяются формулы:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

Пример. $\int \cos 2x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2} \int (\sin x + \sin 5x)\, dx = -\frac{1}{2}\left(\cos x + \frac{\cos 5x}{5}\right) + C$

5.Интегрировнаие дробно-рациональных функций.

а) Если интегрируемая функция содержит $\sin^2 x$ и/или $\cos^2 x$ ($\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx$. В этом случае применяется замена $t = \operatorname{tg} x$. Замена переменных производится по формулам:

$$\left| \begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} t \\ dx = (\operatorname{arctg} t)' dt = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1} = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1} = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right.$$

Пример. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{3}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{\frac{(1+t^2)(1+t^2+3)}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C$

б) Если интегрируется дробно-рациональная функция, содержащая $\sin x$ и $\cos x$ ($\int R(\sin x, \cos x)\, dx$), то можно применять универсальную тригонометрическую подстановку:

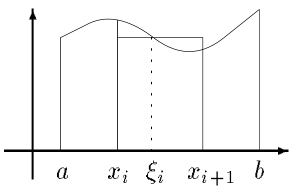
$$\left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right.$$

`Пример.` $\int \frac{dx}{1+2\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right|$
$= \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)(1+\frac{4t}{1+t^2})} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\frac{1+t^2+4t}{1+t^2}} =$
$= 2\int \frac{dt}{t^2+4t+1} = 2\int \frac{dt}{t^2+2\cdot 2t+4-3} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2-3} =$
$= 2\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t+2+\sqrt{3}}{t+2-\sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t+2+\sqrt{3}}{t+2-\sqrt{3}} \right| + C$

6.7 Определённый интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции.

`Определение.` *Криволинейной трапецией* называется плоская фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$ и неотрицательна ($f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a;b]$), слева и справа ограниченная отрезками прямых $x = a$ и $y = b$, снизу ограниченная отрезком прямой $y = 0$.



Для нахождения площади криволинейной трапеции разобъём отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. В каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ и вычислим в этой точке значение функции $f(\xi_i)$.

Построим прямоугольники с основаниями $[x_i; x_{i+1}]$ высоты которых равны $f(\xi_i)$. Найдем площадь ступенчатой фигуры:

$$S_{\text{ст.ф.}} = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Если менять количество отрезков, то получится числовая последовательность:

$$\{S_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right\}$$

Если эта последовательность имеет предел при $n \to \infty$ ($\max \Delta x_i \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $\forall \xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$), то он называется *площадью криволинейной трапеции.*

$$S_{\text{кр.тр.}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \begin{pmatrix} \max \Delta x_i \to 0 \\ \forall \xi_i \in [x_i; x_{i+1}] \end{pmatrix}$$

Если на функцию $f(x)$ наложено условие непрерывности на отрезке $[a;b]$ и если существует предел последовательности $\{S_n\}$, то этот предел называется *определённым интегралом:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \begin{pmatrix} \max \Delta x_i \to 0 \\ \forall \xi_i \in [x_i; x_{i+1}] \end{pmatrix}$$

Основной формулой, позволяющей вычислить любой определённый интеграл, является *формула Ньютона-Лейбница:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} F'(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} (F(x_{i+1} - F(x_i) +$
$+ o(x_i)) = \lim\limits_{n\to\infty} (F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) +$
$+ \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1}) + \sum o(\Delta x_i)) = \lim\limits_{n\to\infty} (F(x_n =$
$= b) - F(x_0 = a) + \sum o(\Delta x_i)) = F(b) - F(a)$

6.8 Свойства определенного интеграла

1-2. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то для любых чисел α и β ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) функция $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на отрезке $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx \pm \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $a < c < b$, то справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

4. Если для всех $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

5. Если $\forall x \in [a;b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b - a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

6. Если $f(x)$ непрерывна и неотрицательна ($f(x) > 0$) на $[a;b]$, то существует такая точка c, принадлежащая этому промежутку, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ – теорема о среднем.

6.9 Вычисление определенных интегралов

Формула интегрирования по частям. Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные производные на сегменте $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)f'(x)dx.$$

`Пример.` $\int\limits_1^2 x^2e^x dx = \left|\begin{smallmatrix} u=x^2 & du=2x\,dx \\ dv=e^x\,dx & v=e^x\end{smallmatrix}\right| = x^2e^x\Big|_1^2 -$ $-\int\limits_1^2 2xe^x dx = \left|\begin{smallmatrix} u=2x & du=2dx \\ dv=e^x\,dx & v=e^x\end{smallmatrix}\right| = 4e^2 - e - (2xe^x)\Big|_1^2 -$ $-\int\limits_1^2 2e^x dx = 4e^2 - e - 4e^2 + 2e + 2e^x\Big|_1^2 = e + 2e^2 -$ $-2e = 2e^2 - e$

Замена переменной. Если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$; 2) функция $u(x)$ непрерывна вместе со своей производной $u'(t)$ на сегменте $[\alpha,\beta]$, где $a = u(\alpha), b = u(\beta)$; 3) сложная функция $f(u(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то

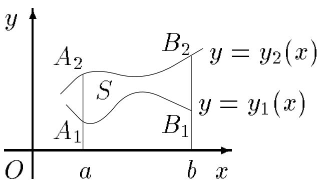
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

`Пример.` $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left|\begin{smallmatrix} x=t^2 \\ dx=2t\,dt\end{smallmatrix} \begin{array}{c|c|c} \text{x} & 0 & 4 \\ \hline \text{t} & 0 & 2 \end{array}\right| =$ $= \int\limits_0^2 \frac{2t\,dt}{t+1} = \int\limits_0^2 (2 - \frac{2}{t+1})dt = 2\int\limits_0^2 dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2t\Big|_0^2 -$ $-2\ln|t+1|\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3 + 2\ln 1 = 4 - \ln 9$

6.10 Вычисление площадей при помощи определенных интегралов.

Плоские области, имеющие конечную площадь, называются *квадрируемые*. При этом возможны следующие случаи:

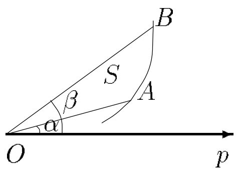
1. Площадь области, заданной в прямоугольных (декартовых) кординатах.



Площадь S плоской фигуры $A_1A_2B_2B_1$, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \geqslant f_1(x))$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$), равна

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$

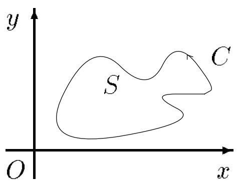
2. Площадь области, заданной в полярных координатах.



Площадь S сектора OAB, ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полупрямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

3. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде.



Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ $[0 \leqslant t \leqslant T]$ – параметрические уравнения кусочно гладкой простой замкнутой кривой C, пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру с площадью S, то

$$S = -\int\limits_0^T y(t)x'(t)\,dt = \int\limits_0^T x(t)y'(t)\,dt,$$

или

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^T [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\;dt.$$

6.11 Вычисление длин дуг с помощью определенных интегралов.

Плоские кривые, имеющие конечную длину, называются *спрямляемыми.* К ним относятся кривые, которые задаются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями. При это возможны следующие случаи:

1.Длина дуги кривой, заданной в прямоугольных (декартовых) координатах. Длина дуги отрезка гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ равна

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

2. Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах. Если $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, где $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, то длина дуги соответствующего отрезка кривой равна

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

3. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая C задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, где $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$, то длина дуги кривой C равна

$$s = \int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

6.12 Несобственные интегралы I-го и II-го типа.

`Определение.` Интеграл называется *несобственным*, если его подинтегральная функция не ограничена на отрезке интегрирования, либо неограничена сама область интегрирования.

Несобственный интеграл I-го типа. Это несобственный интеграл с неограниченным пределом интегрирования:

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$$

или

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Если пределы в правой части существуют, то соответсвующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

`Пример.` $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - 0) = \frac{\pi}{2}$

Несобственный интеграл II-го типа. Это интеграл, который вычисляется по конечному промежутку при условии, что $f(x)$ на этом промежутке имеет одну или несколько точек разрыва 2-го рода.

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx,$$

c – точка разрыва $f(x)$. При это предполагается, что $\varepsilon \to 0$. Если точка разрыва совпадает с началом или с концом промежутка, то несобственный интеграл 2-го типа имеет вид:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx, \quad \text{где} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

или

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx, \quad \text{где} \quad \lim_{x\to b} f(x) = \infty$$

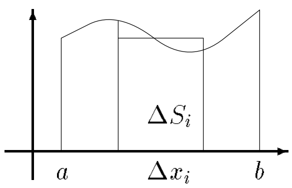
Если пределы в правой части существуют, то соответсвующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

`Пример.` $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty\right\} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\arcsin(1 - \varepsilon) - 0) = \frac{\pi}{2}$

6.13 Приближенное вычисление определенных интегралов.

Формула прямоугольников и формула трапеций являются простейшими численными алгоритмами вычисления определённых интегралов.

Формула прямоугольников.



Выразим интегральную сумму в виде суммы площадей прямоугольников с равными основаниями.

$x_0 = a, x_n = b$,

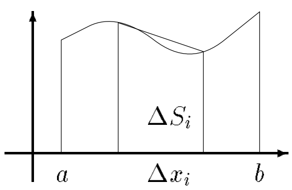
$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, т.е.

$x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i \in [0, n]$.

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n}$

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ — формула прямоугольников.

Формула трапеций.



Площадь любой трапеции равна:

$\Delta S_i = \frac{b-a}{2n}[f(x_{i+1}) + f(x_i)]$.

Действуя так же как в случае формулы прямоугольников, можно получить

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right)$ — формула трапеций.

7 Дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение – уравнение, содержащее искомую (неизвестную) функцию, её производные различных порядков и независимые переменные. Старший порядок производной, входящей в уравнение называется *порядком* этого уравнения. Функция y, обращающая уравнение в тождество, называется *решением* этого уравнения. Если решение уравнения получается в неявной форме, то его называют *общим интегралом.* Геометрическое изображение общего интеграла называется *интегральной кривой.*

В очень большом числе случаев законы природы, управляющие теми или иными процессами, выражаются в форме д.у., а расчёт течения этих процессов сводится к решению д.у.

7.1 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = f(x, y), \tag{9}$$

где f – функция двух переменных, а F – функционал от трёх переменных.

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения* называется такая функция $y = y(x)$, которая обращает уравнение (9) в тождество, т.е.

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0 \quad \text{или} \quad y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Задача. Простейшее дифференциальное уравнение: $y' = f(x)$. $\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx$. $\int dy = \int f(x)dx \Rightarrow y = \int f(x)dx = F(x) + C$. Решение простейшего дифференциального уравнения сводится к вычислению первообразной.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка (9) удобно записывать в форме

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{10}$$

Определение. Пусть $M(x, y) = u(x)$, а $N(x, y) = g(y)$, тогда уравнение (10) называется *дифференциальным уравнением с разделёнными переменными.*

Задача. Решить дифференциальное уравнение: $u(x)dx + g(y)dy = 0$. $\int u(x)dx + \int g(y)dy = C$. Дифференциальное уравнение с разделёнными переменными решается простым интегрированием.

Определение. Пусть $M(x, y) = u_1(x)g_1(y)$, а $N(x, y) = u_2(x)g_2(y)$, тогда уравнение (10) называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача. Решить дифференциальное уравнение: $u_1(x)g_1(y)dx + u_2(x)g_2(y)dy = 0$. Поделим исходное уравнение на $g_1(y)u_2(x) \neq 0$, и тем самым сведём дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными $\frac{u_1(x)}{u_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{u_1(x)}{u_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$.

Пример. $(x^2 + 8)y' = (y + 2)x$

$(x^2 + 8)\frac{dy}{dx} = (y + 2)x$. Умножим обе части на dx.

$(x^2 + 8)dy = (y + 2)x\,dx$. Разделим обе части на $(x^2 + 8)(y + 2)$.

$\frac{dy}{y+2} = \frac{x\,dx}{x^2+8}$. Интегрируем обе части.

$\ln|y + 2| = \int \frac{1/2(x^2+8)'}{x^2+8}dx$

$\ln|y + 2| = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 8| + \ln|C|$

$\ln|\frac{y+2}{\sqrt{x^2+8}}| = \ln|C|$

$\frac{y+2}{\sqrt{x^2+8}} = C$ — общий интеграл.

$y + 2 = C\sqrt{x^2 + 8}$

$y = C\sqrt{x^2 + 8} - 2$ — общее решение.

Определение. *Частным решением дифференциального уравнения* (9) называется такое решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию

$$y(x_0) = y_0 \tag{11}$$

Определение. *Задачей Коши* называется решение дифференциального уравнения (9) при заданном начальном условии (11):

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Задача Коши имеет единственное решение.

Пример. $\begin{cases} x\,dx + y\,dy = 0 \\ y(3) = 4 \end{cases}$

$\int x\,dx = -\int y\,dy$

$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$

$\frac{x2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$

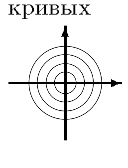
$y^2 + x^2 = 2C$ – общий интеграл.

Подставим начальное условие для нахождения значения C: $16 + 9 = 2c$

$25 = 2c \Rightarrow c = \frac{25}{2}$

$y^2 + x^2 = 25$ – искомое решение.

сем-во интегр. кривых



7.2 Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Определение. Функция $M(x, y)$ называется однородной относительно x и y, если она удовлетворяет равенству

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y),$$

где n — степень однородности.

Определение. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется такое уравнение (10), в которое входят однородные функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$, причём степень их однородности одинаковая.

Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y = tx$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $xdy = (x + y)dx$. Это уравнвние однородное. Положим $y = tx$. Тогда $dy = t\,dx + x\,dt$. Подставим в уравнение: $x(x\,dt + t\,dx) = (x + tx)dx$; $x\,dt = dx$. Решение полученного уравнения с разделяющимися переменными: $dt = \frac{dx}{x}$; $t = \ln|x| + C$. Возвращаясь к старому переменному y получим: $y = x(\ln|x| + C)$. Кроме того, имеется решение $x = 0$, которое было потеряно при делении на x.

7.3 Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка* называется уравнение

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{12}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – известные функции. Линейное уравнение называется *однородным*, если $f(x) = 0$, в противном случае оно *неоднородное*.

Задача. Рещить линейное однородное уравнение: $y' + p(x)y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$

$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = C \Longrightarrow \ln y + \int p(x)\,dx = \ln C$

$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} = C\overline{y}$, где $\overline{y} = e^{-\int p(x)\,dx}$

Для решения линейного неоднородного уравнения (12) сначала необходимо решить соответсвующее однородное уравнение. А затем найти решение неоднородного при помощи формулы Бернулли:

$$y = C\overline{y} + \overline{y}\int \frac{f(x)}{\overline{y}}dx$$

Пример. $\begin{cases} y' + 2xy = x\ln x e^{-x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

$\overline{y} = e^{-\int 2x\,dx} = e^{-x^2}$

$y = C_1 e^{-x^2} + e^{-x^2}\int \frac{x\ln x e^{-x^2}}{e^{-x^2}}dx = C_1 e^{-x^2} + e^{x^2}\int x\ln x\,dx$

$\int x\ln x dx = \left\{ \begin{smallmatrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{smallmatrix} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_2$

$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\right)$ — общее решение.

Подставим начальное условие:

$e^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4} + C\right) = 0$

$e^{-1}\left(-\frac{1}{4} + C\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$

$y = \frac{e^{-x^2}}{4}(2x2\ln x - x^2 + 1)$ — искомое решение.

7.4 Уравнение Бернулли.

Определение. *Уравнением Бернулли* называется нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$y' + p(x)y = y^n f(x), \quad \text{где } n \neq 0 \text{ или } 1 \tag{13}$$

Уравнение Бернулли сводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению 1-го порядка. Поделим (13) на y^n:

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = f(x).$$

Сделаем замену: $z = y^{1-n}$. Т. к. $z' = (1 - n)y^{-n}y'$, то

$$(13) \Longrightarrow \frac{z'}{1-n} + p(x)z = f(x).$$

Умножим обе части на $(1 - n)$

$$z' + p(x)(1 - n)z = (1 - n)f(x)$$

При $n = 0$, уравнение Бернулли становится линейным, при $n = 1$ — уравнением с разделяющимися переменными.

7.5 Дифференциальные уравнения II-го порядка.

Определение. *Дифференциальным уравнением II-го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{или} \quad y'' = f(x, y, y')$$

Общим решением дифференциального уравнения II-го порядка называется уравнение $y = y(x, c_1, c_2)$, которое обращает дифференциальное уравнение в тождество.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = x^2 + \sin x$

$(y')' = x^2 + \sin x$

$y' = \int(x^2 + \sin x)dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + c_1$

$dy = (\frac{x^3}{3} - \cos x + c_1)dx$ Интегрируем обе части.

$y = \frac{x^4}{12} - \sin x + c_1 x + c_2$ – искомое решение.

7.6 Линейные дифференциальные уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением II-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q – произвольные действительные числа, а $f(x)$ – непрерывная функция. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным*, а если $f(x) \neq 0$ – *неоднородным.*

Линейное однородное дифференциальное уравнение II-го порядка с постоянными коэффициентами: $y'' + py' + qy = 0$.

Для решения этого уравнения составляют характеристическое уравнение. Для этого в исходном уравнении заменяют y'' на k^2 ($y'' \to k^2$), $y' \to k^1 = k$, $y \to k^0 = 1$:

$$k^2 + pk + q$$

Решаем квадратное уравнение: $D = p^2 - 4q$,

$k_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}$, $\quad k_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}$

$y_1 = c_1 e^{k_1 x}$; $\quad y_2 = c_2 e^{k_2 x}$ – являются решениями исходного уравнения. Т.к. y_1, y_2 являются линейно независимыми, поэтому линейная комбинация этих функций является решением исходного уравнения, значит общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

Пример. $y'' - 4y' + 3y = 0$

$k^2 - 4k + 3 = 0$; $D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$; $k_1 = 1$; $k_2 = 3$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

В случае, когде $k_1 = k_2 = k$, в качестве линейно независимых решений берутся $y_1 = c_1 e^{kx}$ и $y_2 = c_2 x e^{kx}$. В этом случае общее решение находится в виде:

$$y = e^{kx}(c_1 x + c_2)$$

Пример. Найти общее решение $y'' - 4y' + 4y = 0$

$k^2 - 4k + 4 = 0$

$(k-2)^2 = 0$

$y = e^{2x}(c_1 x + c_2)$

В случае $D < 0$: $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cdot \sqrt{-1} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cdot i$; Обозначим $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, тогда общее решение находится по формуле

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Пример. $y'' + 2y' + 2y = 0$

$k^2 + 2k + 2 = 0$; $D = -4 < 0$; $k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$

$y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

Задачей Коши для уравнения второго порядка называется решение при заданном начальном условии:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Пример. $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$y = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

$y' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$. Подставим начальное условие:

$\begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 1 \\ -2c_1 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2 \end{cases} \begin{cases} c_1 = 1 \\ 2c_2 = 2 \end{cases} \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$;

$y = \cos 2x + \sin 2x$ — искомое решение задачи Коши.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение II-го порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответсвующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

$y'' + py' + qy = f(x)$

$y = y_о + y_ч$, где

$y_о$ – общее решение $y'' + py' + qy = 0$,

$y_ч$ – частное решение $y'' + py' + qy = f(x)$.

Частное решение неоднородного уравнения находится либо методом неопределенных коэффициентов, либо методом вариации произвольных постоянных.

1. Метод неопределенных коэффициентов.

Если $f(x) = P(x)e^{mx}$, то частное решение имеет вид

$$y_ч = Q(x) x^k e^{mx}, \qquad (14)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены одинаковой степени. Если m является корнем характеристического уравнения, то k равно кратности этого корня (т.е. если оба корня равны m, то $k = 2$, если только один корень равен m, то $k = 1$), если же m не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$.

Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q(x)$, надо решение (14) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Пример. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{3x}$

1). $y'' - 4y' + 3y = 0$

$k^2-4k+3=0$; $k_1=1$, $k_2=3$
$y_о=c_1e^x+c_2e^{3x}$
2). $y_ч=Ae^{3x}x$
$y'_ч=3Axe^{3x}+Ae^{3x}$
$y''_ч=3Ae^{3x}+9Axe^{3x}+3Ae^{3x}=9Axe^{3x}+6Ae^{3x}$

Подставляем $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в дифференциальное уравнение:
$9Axe^{3x}+6Ae^{3x}-12Axe^{3x}-4Ae^{3x}+3Axe^{3x}=3e^{3x}$
$2Ae^{3x}=3e^{3x}\Rightarrow 2A=3\Rightarrow A=\frac{3}{2}$
$y_ч=\frac{3}{2}xe^{3x}$
3). $y=y_о+y_ч=c_1e^x+c_2e^{3x}+\frac{3}{2}xe^{3x}$

Если $f(x)=a\cos mx+b\sin mx$, то частное решение имеет вид: $y_ч=A\cos mx+B\sin mx$, при условии, что ни один из корней характеристического уравнения не равен $\pm mi$. Если один из корней равен $\pm mi$, то частное решение имеет вид: $y_ч==Ax\cos mx+Bx\sin mx$. если правая часть содержит только одно слагаемое, то частное решение ищут в виде суммы двух слагаемых.

Пример. $y''+y=4\sin x$
1). $y''+y=0$
$k^2+1=0$, $k=\pm i$, $y_о=c_1\cos x+c_2\sin x$
2). $y_ч=Ax\cos x+Bx\sin x$
$y'_ч=A\cos x-Ax\sin x+B\sin x+Bx\cos x$
$y''_ч=-A\sin x-A\sin x-Ax\cos x+B\cos x++B\cos x-Bx\sin x=-2A\sin x+2B\cos x--Ax\cos x-Bx\sin x$

Подставляем $y''_ч$ и y в дифференциальное уравнение:
$-2A\sin x+2B\cos x-Ax\cos x-Bx\sin x++Ax\cos x+Bx\sin x=4\sin x$
$\begin{cases}-2A=4\\2B=0\end{cases}$ $\begin{cases}A=-2\\B=0\end{cases}$
$y_ч==-2x\cos x$
3). $y=y_о+y_ч=c_1\cos x+c_2\sin x-2x\cos x$

2. Метод вариации произвольных постоянных. Его можно использовать для нахождения частного решения неоднородных уравненийс любым видом правой части. Пусть общее решение соответсвующего однородного уравнения найдено в виде $y_о=c_1y_1+c_2y_2$, тогда частное решение ищется в виде: $y_ч=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$. Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ определяются из системы:

$$\begin{cases}c'_1y_1+c'_2y_2=0\\c'_1y'_1+c'_2y'_2=f(x),\end{cases}$$

решают ее, находят производные $c'_1(x)$ и $c'_2(x)$, затем интегрируют их и находят $c_1(x)$ и $c_2(x)$, подставляют их в сачтное решение.

Пример. $y''+y=\operatorname{tg}x$
1). $y''+y=0$
$k^2+1=0\Rightarrow k=\pm i$
$y_о=c_1\cos x+c_2\sin x$
2). $y_ч=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$
$\begin{cases}c'_1\cos x+c'_2\sin x=0\\-c'_1\sin x+c'_2\cos x=\operatorname{tg}x\end{cases}$, умножим первое уравнение на $\sin x$, а второе на $\cos x$ и сложим их, найдем c'_2 и подставим его значение в первое уравнение и найдем c'_1. $\begin{cases}c'_2=\sin x\\c'_1=-\frac{\sin^2x}{\cos x}\end{cases}$
$c_2(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
$c_1(x)=-\int\frac{\sin^2x}{\cos x}dx=\int\frac{\cos^2x-1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos^2x}{\cos x}dx--\int\frac{dx}{\cos x}=-\sin x+\ln|\operatorname{tg}x|+C$
$y_ч=\sin x\cos x-\ln|\operatorname{tg}x|\cos x-\cos x\sin x$
$y_ч=-\ln|\operatorname{tg}x|\cos x$
$y=c_1\cos x+c_2\sin x-\ln|\operatorname{tg}x|\cos x$

7.7 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами старших порядков.

Однородные уравнения

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$

Решается при помощи характеристического уравнения вида: $k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-1}+\ldots++a_{n-1}k+a_n=0$

Общее решение зависит от кратности корней этого уравнения.

Если корни дествительные числа и имеют кратность равную 1, то каждому из них соответсвует частное решение e^{kx}, где k – корень характеристического уравнения.

Если кратность действительного корня равна t, то ему соответсвует система $y_ч=e^{kx}$, $y_ч=xe^{kx}$, …, $y_ч=x^{t-1}e^{kx}$.

Если корень характеристического уравнения является мнимым и кратности равной 1, то ему соответсвует система $y_ч=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_ч=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Если кратность мнимого корня равна t, то ему соответсвует система из $2t$ функций

$$\begin{cases}y_ч=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_ч=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,y_ч=x^{t-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\\y_ч=e^{\alpha x}\sin\beta x, y_ч=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,y_ч=x^{t-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}$$

Пример. $y^{(V)}+y^{(IV)}+2y^{(III)}+2y''+y'+y=0$
$k^5+k^4+2k^3+2k^2+k+1=0$
$k^4(k+1)+2k^2(k+1)+k+1=0$
$(k+1)(k^4+2k^2+1)=0\qquad k^2=t$
$k=-1\quad t^2+2t+1=0\qquad D=0$
$t=-\frac{2}{2}=-1\quad k^2=-1$
$k=\pm i$
$k=i$ – кратность корня 2
$k=-i$ – кратность корня 2
$y_{ч_1}=e^{-x}$; $y_{ч_2}=e^{0x}\cos x$, $y_{ч_3}=xe^{0x}\cos x$, $y_{ч_4}==e^{0x}\sin x$, $y_{ч_5}=xe^{0x}\sin x$
$y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3x\cos x+C_4\sin x+c_5x\sin x$

Неоднородные уравнения.

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = $
$= f(x)$

Если правая часть уравнения равна $f(x)$, то уравнение называется *неоднородным.* Чтобы найти решение неоднородного уравнения требуется найти решение $y_{\text{о}}$ соответсвующего однородного уравнения, а затем частное решение $y_{\text{ч}}$ неоднородного. Общее решение неоднородного уравнения является суммой $y = y_{\text{о}} + y_{\text{ч}}$.

Частное решение неоднородного уравнения можно найти двумя способами:

1. По виду правой части.

2. Методом вариации произвольных постоянных.

Пример. $y^{(V)} + 3y^{(IV)} + 3y^{(III)} + y'' = x$

1) $y^{(V)} + 3y^{(IV)} + 3y^{(III)} + y'' = 0$

$k^5 + 3k^4 + 3k^3 + k^2 = 0$

$k^2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = 0$

$k_{1,2} = 0$

$(k+1)(k^2 - k + 1) + 3k(k+1) = 0$

$(k+1)(k^2 + 2k + 1) = 0$

$k_3 = -1 \qquad k_{4,5} = -1$

$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 x^2 e^{-x}$

$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 x^2 e^{-x}$

2) По виду правой части ищем частное решение в виде: $y_{\text{ч}} = (Ax + B)e^{0x} x^2$

$y_{\text{ч}} = Ax^3 + Bx^2$

$y'_{\text{ч}} = 3Ax^2 + 2Bx$

$y''_{\text{ч}} = 6Ax + 2B$

$y'''_{\text{ч}} = 6A$

$y^{(IV)}_{\text{ч}} = 0$

$y^{(V)}_{\text{ч}} = 0$

$18A + 12Ax + 4B = x$

$\{\, 12A = 118A + 4B = 0 \quad \{\, A = \frac{1}{12} B = -\frac{3}{8}$

$y_{\text{ч}} = (\frac{x}{12} - \frac{3}{8})x^2$

3) $y = C_1 + C_2 x + e^{-x}(C_3 + C_4 x + C_5 x^2) + x^2(\frac{x}{12} - \frac{3}{8})$ — искомое решение.

7.8 Системы нормальных уравнений.

Определение. *Системой дифференциальных уравнений* называется система уравнений от неизвестных функций, независимой переменной и производных неизвестных функций. *Решением системы* называется такая совокупность функций, которая обращает уравнения системы в тождество.

Определение. Система уравнений называется *нормальной*, если все уравнения системы разрешены относительно производных.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$

Для решения системы нормальных уравнений их сводят к дифференциальному уравнению, которые является линейным. Порядок уравнения равен количеству неизвестных функций, входящих в систему. Аналогично: любое линейное уравнение можно записать в виде системы нормальных уравнений. Количество уравнений в системе будет совпадать с порядком уравнения, т.е. существует взаимно-однозначное соответсвие между множеством линейных уравнений и множеством систем нормальных уравнений.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = x - y + z \end{cases}$

$\ddot{x} = \dot{y}$ Продиф. обе части уравнения.

$\ddot{y} = \dot{z}$

$\dddot{x} = \dot{z} \Rightarrow \dddot{x}\ x - y + z$

$\dddot{x} = x - \dot{x} + \ddot{x}$

$\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = 0$

$k^3 - k^2 + k - 1 = 0$

$k^2(k-1) + k - 1 = 0$

$(k-1)(k^2+1) = 0$

$k - 1 = 0 \quad k^2 + 1 = 0$

$k_1 = 1 \quad k_{2,3} = \pm i$

$x_1 = e^t,\ x_2 = \cos t,\ x_3 = \sin t$

$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = C_1 e^t + C_2 \cos t + $
$+ C_3 \sin t$

$y(t) = \dot{x}(t) = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$

$z(t) = \dot{y}(t) = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t$

Если полученные функции являются непрерывными и имеют непрерывные производные, то существует единственное решение ситемы, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \\ \ldots \\ y_n(t_0) = x_{n0}, \end{cases}$$

т.е. задача Коши для системы нормальных уравнений имеет единственное решение.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y \\ \dot{y} = -2x - 3y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Найдём общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y \\ \dot{y} = -2x - 3y \end{cases}$

Диффер. первое уравнение $\ddot{x} = -5\dot{x} - 4\dot{y}$

$\ddot{x} = -5\dot{x} + 8x + 12y$

$y = -\frac{1}{4}(\dot{x} + 5x)$

$\ddot{x} = -5\dot{x} + 8x - 3\dot{x} - 15x$

$\ddot{x} + 8\dot{x} + 7x = 0$

$k^2 + 8k + 7 = 0 \qquad D = 36 \quad k_1 = -7; \quad k_2 = -1$

$x(t) = C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-t}$

$y(t) = -\frac{1}{4}(-7C_1e^{-7t} - C_2e^{-t} + 3C_1e^{-7t} + 5C_2e^{-t}) = \frac{1}{2}C_1e^{-7t} - C_2e^{-t}$

Найдем частное решение: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \frac{1}{2}C_1 - C_2 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}C_1 = 3 \\ C_2 = 1 - C_1 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = 2e^{-7t} - e^{-t} \\ y(t) = e^{-7t} + e^{-t} \end{cases}$ – искомое частное решение.

7.9 Матричная форма записи систем линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим ссистему уравнений вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда система примет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Т.к. эту систему можно свести к решению дифференциального уравнения n-го порядка, то общее решение его можно записать в виде:

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \ldots + C_nx_n(t),$$

где $x_i(t)$ – общее решение линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Поэтому их можно находить в виде

$$x_i(t) = k_ie^{rt} \tag{15}$$

Подставим эти функции в систему уравнений. $\dot{x}_i(t) = k_i \cdot re^{rt}$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} re^{rt} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} r^{rt}$$

$\mathbf{k}re^{rt} = \mathbf{A}\mathbf{k}e^{rt}$. Делим обе части на e^{rt}

$\mathbf{k}r = \mathbf{A}\mathbf{k}$

$\mathbf{A}\mathbf{k} - \mathbf{k}r = 0$

$(\mathbf{A} - r\mathbf{E})\mathbf{k} = 0$ – называется характеристическим уравнением системы.

Решения этого уравнения называется *собственными числами* матрицы $\mathbf{A}$, а вектор $\vec{k}$ называется it собственным вектором этой матрицы. Для того, чтобы эта система имела не нулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен 0.

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{E}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

Решая это уравнение, находят значения r.

Значения k_i находят путем решения системы уравнений вида

$$\begin{cases} (a_{11} - r)k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r)k_2 + \ldots + a_{1n}k_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \ldots + (a_{nn} - r)k_n = 0 \end{cases}$$

Найдя значения r и k_i подставляем их в (15). В результате получим систему функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. Они образуют фундаментальную систему решений. Линейная комбинация функций, входящих в эту систему, является общим решением системы линейных уравнений.

7.10 Особые точки дифференциальных уравнений.

В дифференциальном уравнении I-го порядка переменные x и y являются равноправными. Точки, в которых происходит нарушение условий существования и единственности решения называются *особыми точками.* Если дифференциальное уравнение разрешено отностительно производной ($y' = f(x,y)$), то особой точкой этого уравнения является точка разрыва правой части уравнения.

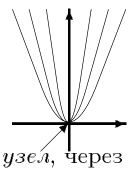
$$x' = \frac{1}{f(x,y)} \qquad y' = f(x,y)$$

Рассмотрим примеры таких точек.

а) $y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ $x = 0$ – точка разрыва правой части уравнения.

$x' = \frac{x}{2y} \Rightarrow y = 0$ – точка разрыва правой части.

Точка $(0;0)$ – особая точка этого уравнения.



узел, через него проходят все $y_ч$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$. Умножим обе части на dx.

$dy = \frac{2y}{x}dx$. Разделим обе части на yи проинтегрируем.

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$

$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$

$y = Cx^2$

$xdy = 2ydx$, $x = 0$ – частное решение, $y = 0$ – частное решение.

б) $y' = -\frac{y}{x}$

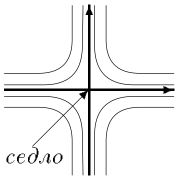
$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$. Умномаем обе части на dx.

$dy=-\frac{y}{x}dx$. Делим обе части на y, и интегрируем.

$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$

$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|$

$y=\frac{C}{x}$



в) $y'=-\frac{x}{y}$

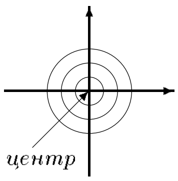
$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. Умножим обе части на dx.

$dy=-\frac{x}{y}dx$. Умножим обе части на y и интегрируем.

$\int ydy=-\int xdx$

$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C$

$x^2+y^2=2C$



г) $y'=\frac{x+y}{x-y}$

Пусть $y=xt$. Тогда $y'=t+xt'$

$t+xt'=\frac{x+tx}{x-tx}=\frac{x(1+t)}{x(1-t)}$

$xt'=\frac{1+t}{1-t}-t\Rightarrow xt'=\frac{1+t-t+t^2}{1-t}$

$xt'=\frac{1+t^2}{1-t}$

$x\frac{dt}{dx}=\frac{1+t^2}{1-t}\Rightarrow xdt=\frac{1+t^2}{1-t}dx$

$\int\frac{1-t}{1+t^2}dt=\int\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{t\,dt}{1+t^2}=\ln|cx|$

$\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{1+t^2}=\ln|cx|$

$\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\ln|1+t^2|=\ln|cx|$

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|cx\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}|$

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|\frac{cx\sqrt{x^2+y^2}}{x}|$

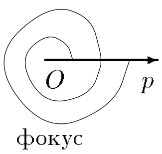
$$c\sqrt{y^2+x^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \tag{16}$$

Перейдем к полярной системе координат: $x==r\sin\varphi$, $y=r\sin\varphi$ и $x^2+y^2=r^2$.

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Тогда уравнение (16) примет вид:

$cr=e^{\varphi}$ или $r=c_1e^{\varphi}$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
r	c_1	$c_1e^{\frac{\pi}{2}}$	c_1e^{π}	$c_1e^{2\pi}$



Дифференциальные уравнения I-го порядка могут иметь особые точки только одного из четырёх видов: узел, седло, центр, фокус. Это утверждение было впервые доказано Ляпуновым.[1]

[1] Ляпунов Александр Михайлович - русский математик и механик (1857-1918).

7.11 Решение дифференциальных уравнений методом изоклин.

Графическое решение дифференциальных уравнений основывается на уравнении

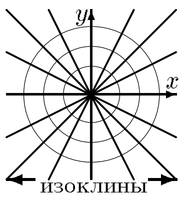
$$y'=f(x,y)=k,$$

где k — угловой коэффициент касательной. При фиксированном k оно описывает кривую с равным углом наклона касательных. Эта кривая называется *изоклиной.* $f(x,y)=k$ – уравнение изоклины.

Метод изоклин заключается в построении семейства изоклин с нанесёнными на них отрезками касательных. Множество отрезков касательных образует поле направлений касательных интегральных кривых. Плавное соединение касательных даёт семейство интегральных кривых.

`Пример.` Решить методом изоклин уравнение $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

Уравнение изоклины $-\frac{x}{y}=k$ в данном случае совпадает с уравнением нормали $y=-\frac{1}{k}x$.



k	ур-е изоклины
$\pm\infty$	$y=0$
±1	$y=\mp x$
0	$x=0$

Интегральные кривые представляют из себя окружности. Получим это решение аналитически:

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\Longrightarrow y\,dy+x\,dx=0\Longrightarrow$
$\int y\,dy+\int x\,dx=C\Longrightarrow x^2+y^2=2C$

Варкалось. Хливкие шорьки
Пырялись по наве,
И хрюкотали зелюки,
Как мюмзики в мове.

Список литературы

[1] В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Математический анализ, т. 1, М.: изд. МГУ, 1985.

[2] Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., М.: изд. МГУ, изд. ЧеРо, 1997

[3] Математический энциклопедический словарь. М.: «Советская энциклопедия», 1988.

[4] А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа. М.: «Наука», 1988.

[5] В. Г. Власов. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис, 1997.

[6] В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Аналитическая геометрия. М.:Наука, 1988.

[7] А. Ф. Филиппов, Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.:Наука, 1979.